Zur Spektraltheorie positiver Halbgruppen auf geordneten Banachräumen

DISSERTATION
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
IRMTRAUD KLEIN
aus Friedrichshafen

1984

Zur Spektraltheorie positiver Halbgruppen auf geordneten Banachräumen

DISSERTATION
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
IRMTRAUD KLEIN
aus Friedrichshafen

1984

Tag der mündlichen Qualifikation: 1. August 1984

Dekan:	Professor Dr. U. Felgner
1. Berichterstatter:	Professor Dr. H.H. Schaefer
2. Berichterstatter:	Professor Dr. E. Scheffold

Druck Köhler Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 3

§0 Terminologie und Hilfsmittel 7

§1 Vorbemerkungen und einleitende Beispiele 15

§2 Die schwache Kegelspektralschranke $s_K(A)$ 20

§3 Untere Schranken für $s_K(A)$ 28

§4 Reelle Spektralwerte des Generators 35

§5 Die induzierten Operatoren $\{T(t)_K\}$ 44

§6 Die schwache Kegelwachstumsschranke ω_K 53

§7 Sätze vom Krein-Rutman-Typ 58

§8 Irreduzible Halbgruppen 63

Literaturverzeichnis 70

Einleitung

Einparametrige Halbgruppen treten in verschiedenen Gebieten der Analysis auf. Sie spielen insbesondere im Bereich der Anwendungen eine bedeutsame Rolle. Bereits E. Hille wies in seiner grundlegenden Monographie [13] darauf hin, daß viele der Halbgruppen, die in der angewandten Mathematik vorkommen, aus positiven Operatoren bestehen. Eine genauere Erforschung der Theorie positiver Halbgruppen begann jedoch erst in den sechziger Jahren (S. Karlin, G. Lumer, R. Phillips), wurde ständig weiterentwickelt und in den letzten Jahren durch die Arbeiten von R. Derndinger, R. Nagel und G. Greiner [4,5,8,9] entscheidend erweitert.

Die meisten Untersuchungen in dieser Richtung gehen davon aus, daß der zugrundeliegende Banachraum eine Verbandsstruktur trägt. Manche spektraltheoretischen Zusammenhänge werden jedoch transparenter, wenn man stattdessen schwächere Forderungen an die Ordnung stellt. Daher wählen wir einen etwas allgemeineren Ansatz und betrachten positive (einparametrige, stark stetige) Halbgruppen auf geordneten Banachräumen; das sind Banachräume, die einen echten abgeschlossenen Kegel besitzen, der eine Ordnung induziert. Die Abbildungen der Halbgruppe sind positiv, wenn sie diesen Kegel invariant lassen.

Unerläßliche Voraussetzung für das Studium positiver halbgruppen ist zunächst eine genaue Kenntnis der Theorie beschränkter positiver Operatoren. Wir legen daher die Methoden und Techniken aus der Spektraltheorie dieser Operatoren, wie sie im Anhang des Buches [23] von H.H. Schaefer dargestellt werden, zugrunde. Weiterhin orientieren wir uns bei unseren Überlegungen an den Ergebnissen von E. Scheffold in [29].

Wesentlicher Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ist die Definition der schwachen Kegelspektralschranke $s_K(A)$ des Generators A einer positiven Halbgruppe. In Anlehnung an E. Scheffold [29] wird sie mit Hilfe des gemeinsamen Holomorphiebereichs der skalaren Resolventenabbildungen $\lambda \to \langle R(\lambda,A)x,x' \rangle$ für Elemente x aus dem Kegel und Elemente x' aus dem dualen Kegel definiert. Es zeigt sich, daß die Einblicke, die man durch die Untersuchung der schwachen Kegelspektralschranke gewinnt, zu Präzisierungen und Verallgemeinerungen bereits bekannter Eigenschaften der Spektralschranke führen. Außerdem wird eine genauere Untersuchung der reellen Spektralwerte des Generators möglich.

Obwohl sich fast alle Ergebnisse aus der Theorie beschränkter positiver Operatoren auf die entsprechende Situation bei positiven Halbgruppen übertragen lassen, ist dies nicht "routinemäßig" mittels der Abbildung $\lambda \to e^{\lambda t}$ möglich, da diese nicht injektiv ist und der "spektrale

Abbildungssatz" $\sigma(T(t))\setminus\{0\} = e^{t\sigma(A)}$ überdies nur in seltenen Fällen gilt.
Einen Teil der Ergebnisse, die in dieser Arbeit erzielt wurden, erhielten bereits G. Greiner, J. Voigt und M. Wolff in [10], allerdings unter spezielleren Voraussetzungen und mit anderen Methoden.
Der folgende kurze Überblick über die wesentlichen Resultate dieser Arbeit wird durch ausführlichere Erläuterungen zu Beginn jedes Paragraphen ergänzt.

§0 dient dazu, den Leser mit den Bezeichnungen, die in dieser Arbeit verwendet werden, vertraut zu machen und die wichtigsten Hilfsmittel aus der Theorie geordneter Banachräume sowie der Theorie stark stetiger Halbgruppen bereitzustellen.
In §1 betrachten wir zunächst ausführlich zwei Beispiele geordneter Banachräume und beweisen dann ein Ergebnis über die Integraldarstellung der skalaren Resolvente $\lambda \to \langle R(\lambda,A)x,x'\rangle$ (für $x \in K$ und $x' \in K'$), das für die folgenden Abschnitte grundlegend ist (1.3).
Im Mittelpunkt des zweiten Paragraphen steht die schwache Kegelspektralschranke, die definiert wird (2.1), um einen Zusammenhang zwischen der Ordnung von E und den spektraltheoretischen Eigenschaften des Generators A herzustellen. Sie wird durch eine Formel genauer charakterisiert (2.5).
In §3 geben wir mit Hilfe von kompakten Spektralmengen,

peripheren Spektralmengen und Elementen des Punktspektrums untere Schranken für die schwache Kegelspektralschranke $s_K(A)$ an (3.4).
Der vierte Paragraph befaßt sich mit reellen Spektralwerten des Generators A. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Erörterung der Frage, wann die Spektralschranke s(A) ein Spektralwert ist (4.7).
Im fünften Paragraphen untersuchen wir das spektrale Verhalten der Familie der auf K-K eingeschränkten Operatoren $\{T(t)_K\}$ und charakterisieren anschließend den Teil des Spektrums, in dem $s_K(A)$ liegt, genauer (5.10).
Analog zur schwachen Kegelspektralschranke definieren wir in §6 die schwache Kegelwachstumsschranke und untersuchen ihre Eigenschaften.
Im nächsten Paragraphen werden die wesentlichen Ergebnisse von Krein und Rutman in etwas allgemeinerer Form auf Generatoren positiver Halbgruppen übertragen (7.2 und 7.4).
Abschließend befassen wir uns mit irreduziblen Halbgruppen und stellen die in [10] formulierten Resultate über irreduzible Halbgruppen in allgemeinerem Rahmen dar.

Herrn Prof. Dr. H.H. Schaefer möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein Interesse und seine Ratschläge ganz herzlich danken. Außerdem gilt mein Dank der Arbeitsgruppe Funktionalanalysis für wertvolle und hilfreiche Gespräche.

§0 Terminologie und Hilfsmittel

Grundlegend für diese Arbeit sind die Theorie geordneter Banachräume, die Spektraltheorie positiver beschränkter Operatoren und die allgemeine Theorie starkstetiger Halbgruppen.
In den einzelnen Abschnitten dieses Paragraphen werden die benötigten Fakten aus diesen Bereichen zusammengestellt. Hinsichtlich aller Beziehungen und Zusammenhänge, die hierbei nicht angesprochen werden, sei für die Gebiete der geordneten Banachräume und der Spektraltheorie positiver Operatoren auf das Buch von H.H. Schaefer [23], für die Theorie starkstetiger Halbgruppen auf die Werke von E.B. Davies [3], N. Dunford/J.T. Schwartz [7] oder K. Yosida [31] verwiesen.

Geordnete Vektorräume

0.1 Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der mit einer Ordnungsstruktur, die durch eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation "$\leq$" gegeben ist, versehen ist; E heißt geordneter Vektorraum, wenn die Ordnung "$\leq$" mit der Addition in E und der Multiplikation mit nichtnegativen reellen Zahlen verträglich ist, d.h. wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(LO1) $x \leq y \iff x+z \leq y+z$ für alle $x,y,z \in E$

(L02) $x \leq y \iff \lambda x \leq \lambda y$ für alle $x,y \in E$ und $\lambda > 0$.

0.2 Die Menge $K := \{x \in E: x \geq 0\}$ wird positiver Kegel von E genannt und hat folgende Eigenschaften:

(K1) $K + K \subseteq K$,

(K2) $\lambda K \subseteq K$ für alle $\lambda > 0$,

(K3) $K \cap -K = \{0\}$.

Jede Teilmenge K von E, die die Eigenschaften (K1)-(K3) besitzt, definiert durch " $x \leq y \iff y-x \in K$ " eine Ordnungsrelation bezüglich derer E ein geordneter Vektorraum mit positivem Kegel K ist. Es gibt daher in jedem Vektorraum eine eineindeutige Beziehung zwischen den positiven Kegeln und den Ordnungsstrukturen, die (L01) und (L02) erfüllen.

Geordnete Banachräume

0.3 Ist E ein reeller Banachraum und zugleich ein geordneter Vektorraum mit positivem Kegel K, so nennen wir das Paar (E,K) geordneten Banachraum, wenn K in E abgeschlossen ist. Dabei setzen wir stets $K \neq \{0\}$ voraus.

K heißt erzeugend, wenn die lineare Hülle von K mit E übereinstimmt,

total, wenn die lineare Hülle von K in E dicht ist,

normal, wenn auf E eine äquivalente Norm $\|\cdot\|_K$ existiert, die auf K monoton ist, d.h. für $x,y \in K$ mit $x \leq y$ ist auch $\|x\|_K \leq \|y\|_K$.

0.4 Die Menge $K' := \{x' \in E' : \langle x,x' \rangle \geq 0$ für alle $x \in K\}$ bildet den dualen Kegel von K. K' ist die Polare von -K bezüglich der Dualität $\langle E,E' \rangle$. Weil K abgeschlossen und $K \cap -K = \{0\}$ ist, ist die lineare Hülle von K' in E' $\sigma(E',E)$-dicht; daher trennt K' die Punkte von E. K' ist genau dann ein positiver Kegel in E', wenn die lineare Hülle von K in E dicht ist.

0.5 Ist (E,K) ein geordneter Banachraum mit erzeugendem Kegel, so ist K ein strikter B-Kegel, d.h. jedes $x \in E$ läßt sich in der Form $x = x_1 - x_2$ darstellen, wobei $x_i \in K$ und $\|x_i\| \leq M\|x\|$ ist für eine feste Konstante $M > 0$ und $i = 1,2$. Aus [23, V,3.5] erhält man folgende Resultate:

In einem geordneten Banachraum (E,K) gilt:

(i) K ist genau dann erzeugend in E, wenn K' normal ist,

(ii) K ist genau dann normal, wenn K' erzeugend ist,

(iii) ist K erzeugend, so ist jede positive Linearform auf E stetig.

0.6 Für eine genaue Erörterung der folgenden Definitionen verweisen wir auf [23]. (E,K) sei ein geordneter Banachraum.

Mit $[x,y]$ bezeichnen wir das Ordnungsintervall

$[x,y] := \{z \in E: x \leq z \leq y\}$.

Ein Element $x \in K$ heißt quasiinnerer Punkt von K, wenn das Ordnungsintervall $[0,x]$ in E total ist; $x \in K$ ist eine Ordnungseinheit in E, wenn $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n[-x,x]$ ist.

Eine stetige lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(E)$ nennt man positiv, wenn $T(K) \subseteq K$ ist. T heißt irreduzibel, wenn für alle $x > 0$ und ein $\lambda > r(T)$ $TR(\lambda,T)x$ quasiinnerer Punkt von K ist.
Eine abgeschlossene Teilmenge K_o von K wird solider Teilkegel von K genannt, wenn aus $0 \leq x \leq y$ mit $y \in K_o$ und $x \in E$ folgt, daß $x \in K_o$ ist.

0.7 Ein weiterer Begriff, auf den in dieser Arbeit zurückgegriffen wird, ist der in [29] ausführlich diskutierte schwache Kegelspektralradius $r_\sigma^+(T)$ eines beschränkten linearen Operators:

$r_\sigma^+(T) = \inf \{r > 0: |\lambda| > r, x \in K \text{ und } x' \in K' \text{ impliziert, daß } \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} \langle T^n x, x' \rangle \text{ absolut konvergent ist}\}$.

0.8 Sei (E,K) ein geordneter Banachraum. Die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}} := E + iE$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $|x+iy| = \sup \{\|(\cos t)x + (\sin t)y\|: 0 \leq t \leq 2\pi\}$ mit $x,y \in E$. Der positive Kegel K wird mit seiner Einbettung in $E_{\mathbb{C}}$ identifiziert. Jeder Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung $\overline{T} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$, die durch $\overline{T}(x+iy) = Tx+iTy$ für $x,y \in E$ definiert wird. Die Begriffe Spektrum, Resolvente und Spektralradius von T werden mit den entsprechenden Werten von $\overline{T}$ identifiziert.
Da die meisten Ergebnisse durchsichtiger werden bzw. einfacher darstellbar sind, wenn der zugrundeliegende

Banachraum reell ist, gehen wir stets von positiven Operatoren in geordneten rellen Banachräumen E aus und betrachten - wenn es sich um spektraltheoretische Gesichtspunkte handelt - ihre Fortsetzung in der Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}}$, ohne jedesmal explizit darauf hinzuweisen.

Spektraltheorie positiver (starkstetiger) Halbgruppen

0.9 Unter einer positiven Halbgruppe auf dem geordneten Banachraum (E,K) verstehen wir eine Familie $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\}$ (kurz: $\{T(t)\}$) beschränkter linearer Operatoren auf E mit folgenden Eigenschaften:

(i) $T(0) = Id_E$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t,s \in \mathbb{R}^+$,

(ii) Für jedes $x \in E$ ist die Abbildung $t \to T(t)x$: $\mathbb{R}^+ \to E$ stetig,

(iii) Jeder Operator $T(t)$ $(t \geq 0)$ ist positiv.

Erfüllt die Familie $\{T(t)\}$ nur die Bedingungen (i) und (ii), so spricht man von einer starkstetigen Halbgruppe.

0.10 Der Generator A einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit Definitionsbereich

$D(A) := \{x \in E: \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T(t)x-x) \text{ existiert}\}$, und es ist

$Ax := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T(t)x-x)$, für $x \in D(A)$.

Wir nennen A positiven Generator, wenn die zugehörige Halbgruppe $\{T(t)\}$ positiv ist. Dies ist konsistent mit dem Begriff des positiven stetigen Operators, da jeder

positive Operator ein positiver Generator im oben erklärten Sinn ist.

0.11 Das Spektrum des Generators ist die Menge $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda - A: D(A) \to E \text{ ist nicht bijektiv}\}$. Bekanntlich ist $\sigma(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die kompakt und nicht leer ist, wenn A ein beschränkter Operator ist. Die folgenden Teilmengen des Spektrums sind im weiteren von Interesse:

das Punktspektrum: $P\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}:$ es gibt ein $x \in D(A)$, $x \neq 0$, so daß $Ax = \lambda x$ ist.$\}$,

das approximative Punktspektrum: $A\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}:$ es gibt eine normierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$, so daß $((\lambda-A)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.$\}$.

Die Resolventenmenge $\rho(A) := \mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R(\lambda,A) := (\lambda-A)^{-1}$ ein stetiger, linearer Operator auf E. Die Funktion $R(\cdot,A): \rho(A) \to \mathcal{L}(E): \lambda \to R(\lambda,A)$ ist lokalholomorph und heißt Resolvente von A. Sie erfüllt die Resolventengleichung: $R(\lambda,A) - R(\mu,A) = (\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$ für λ und μ aus $\rho(A)$.

Aus der Gleichung

0.12 $(Id - e^{-\lambda t}T(t))x = (\lambda-A)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$, die für alle $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt, erhält man für alle $\lambda \in \rho(A)$:

0.13 $R(\lambda,A)(Id - e^{-\lambda t}T(t)) = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)\,ds$.

0.14 Es gibt reelle Zahlen $w \in \mathbb{R}$ und $M \geq 1$, so daß für alle $t \in \mathbb{R}^+$ $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ ist. ω bezeichnet das Infimum all dieser Zahlen $w \in \mathbb{R}$ und heißt Wachstumsschranke.

Für ω gilt:
$$\omega = \inf \{ \frac{1}{t} \log \|T(t)\| : t > 0\}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

Für den Spektralradius des Operators $T(t)$ ergibt sich: $r(T(t)) = e^{\omega t}$. Das Spektrum des Generators ist in der linken Halbebene $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda \leq \omega\}$ enthalten. Die Größe $s(A) := \sup \{\operatorname{Re} \lambda: \lambda \in \sigma(A)\}$ heißt Spektralschranke von A. Es ist stets $-\infty \leq s(A) \leq \omega < \infty$.

In der rechten Halbebene $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$ besitzt die Resolvente des Generators die folgende Integraldarstellung:

0.15 $$R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \qquad (\operatorname{Re} \lambda > \omega,\ x \in E).$$

Der Integrand ist für jedes $x \in E$ Bochner-integrierbar. Noch etwas allgemeiner gilt sogar für $n \geq 0$:

0.16 $$R(\lambda,A)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \qquad (\operatorname{Re} \lambda > \omega,\ x \in E).$$

Dabei ist das rechtsstehende Integral jeweils punktweise definiert.

Ist $\lambda \in \rho(A)$, dann erhält man für alle $\mu \in \rho(A)$ mit $|\mu-\lambda| \leq \|R(\lambda,A)\|^{-1}$ die Reihenentwicklung:

0.17 $$R(\mu,A) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda,A)^{n+1}(\lambda-\mu)^n.$$

Die adjungierte Halbgruppe

0.18 Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banachraum E mit Generator A. Dann ist die Familie der Adjungierten $\{T(t)'\}$ i.a. keine stark stetige Halbgruppe mehr. Man betrachtet deshalb die Menge $E^* := \{x' \in E' : \lim_{t\to 0} \|T(t)'x' - x'\| = 0\}$. E^* ist ein abgeschlossener $T(t)'$-invarianter Teilraum von E', und die Halbgruppe der Einschränkungen $T(t)^* := T(t)'_{|E^*}$ ist auf E^* stark stetig. $\{T(t)^*\}$ heißt adjungierte Halbgruppe, ihr Generator wird mit A^* bezeichnet.

Es gelten folgende Aussagen, deren Beweise man in [14] und [22] findet:

(i) $\overline{D(A')} = E^*$,

(ii) $D(A^*) = \{x' \in E' : x' \in D(A') \text{ und } A'x' \in E^*\}$ und $A^* = A'_{|D(A^*)}$,

(iii) $\sigma(A) = \sigma(A') = \sigma(A^*)$,

(iv) $R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A')_{|E^*}$ für $\lambda \in \rho(A')$.

§1 Vorbemerkungen und einleitende Resultate

Wir sind in dieser Arbeit besonders an Situationen interessiert, in denen positive Halbgruppen auf geordneten Banachräumen, die keine Banachverbände sind, vorliegen. Wir geben - da sich die meisten bisherigen Untersuchungen auf Banachverbände beschränken - zunächst einen kurzen Überblick über die Vielfalt der auftretenden Räume und formulieren dann einige Ergebnisse, die für das weitere Vorgehen grundlegend sind.

Im folgenden gehen wir auf zwei Beispiele genauer ein, von denen das eine aus dem Bereich der angewandten Mathematik stammt, während das zweite eher von theoretischem Interesse ist.

1.1 Beispiel: Sei μ eine Linearform auf $C[-1,0]$ mit Masse 1 im Punkt 0, d.h. $\mu = \nu - \delta_0$ für ein Maß $\nu \in C[-1,0]'$ mit $\nu \perp \delta_0$. Dann ist die Hyperebene $E := \operatorname{Ker}(\delta_0 - \nu) = \{f \in C[-1,0]: f(0) = \nu(f)\}$ i.a. kein Banachverband, sondern ein geordneter Banachraum (für $\nu(f) = f(-\frac{1}{2}) + f(-1)$ ist E beispielsweise ein Banachraum mit erzeugendem und normalem Kegel K, aber K ist kein Verbandskegel). Der Differentialoperator A_ν mit $A_\nu f = f'$ für $f \in D(A_\nu) = \{f \in E \cap C^1[-1,0]: f'(0) = \nu(f)\}$ ist für positive Linearformen ν der Generator einer po-

sitiven Halbgruppe $\{T(t)\}$ (siehe [15]). Die Abbildungen $t \to T(t)x$ für $x \in D(A_\nu)'$ können mit den Lösungen bestimmter Differentialgleichungen (retardierte Differentialgleichungen), die in Biologie, Medizin und Kontrolltheorie eine wichtige Rolle spielen, identifiziert werden (siehe [12]).

1.2 Beispiel: Sei E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt u. Anstelle des üblichen Verbandskegels betrachten wir die Menge $K := \{x \in E: x = t \cdot y$ für ein $t \geq 0$ und ein $y \in [u,2u]\}$. Wir zeigen zunächst, daß K den Anforderungen eines abgeschlossenen Kegels genügt.
Dazu sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, die gegen $x \in E$ konvergiert ($x \neq 0$). Jedes $x_n \in K$ ist in der Form $x_n = t_n \cdot y_n$ mit $y_n \in [u,2u]$ und $t_n \geq 0$ darstellbar. Weil die Norm in E monoton ist, ist $\|u\| \leq \|y_n\| \leq 2\|u\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die Skalare t_n nach oben und unten durch positive Konstanten beschränkt sind. O.B.d.A. nehmen wir an, daß die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist (sonst wählen wir eine konvergente Teilfolge). Ihr Grenzwert sei t_o, eine positive Zahl > 0. Nun gilt von einem $n_o > 0$ an die Ungleichung $\|y_n - \frac{x}{t_o}\| < \frac{1}{t_o}|t_o - t_n|\|y_n\| + \frac{1}{t_o}\|x_n - x\|$.
Weil das Ordnungsintervall $[u,2u]$ abgeschlossen ist, ist $\frac{x}{t_o}$ ein Element aus K, also ist $x \in K$; infolgedessen ist K abgeschlossen.
Bedingung (K2) und (K3) sind leicht nachprüfbar, (K1) folgt aus der Konvexität des Ordnungsintervalls $[u,2u]$.

Zur Veranschaulichung des letzten Beispiels sei $E = C[0,1]$ und u die Funktion, die überall konstant 1 ist. Dann ist der oben definierte Kegel die Menge

$$\{f \in E: m := \min\{f(s): s \in [0,1]\} > 0 \text{ und } \frac{1}{m} \max\{f(s): s \in [0,1]\} \leq 2\} \cup \{0\}.$$

Eine allgemeinere Fassung von Beispiel 1.2 findet man in [16, 1.1.2].

Wir streifen nur kurz einige weitere Beispiele:
Die Sobolevräume $W_p^1(\mathbb{R})$ sind nach [30] Vektorverbände, aber keine Banachverbände; für $W_p^n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ ist der Kegel nicht einmal mehr ein Verbandskegel. Eine Konstruktion, die die Situation der Sobolevräume erweitert und verallgemeinert findet man in [19].
Ist $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf einem Banachverband E, so besitzt der Raum E^* (siehe 0.18) einen $\sigma(E^*,E)$-totalen, normalen positiven Kegel, d.h. die adjungierte Halbgruppe $\{T(t)^*\}$ ist nicht notwendigerweise wieder auf einem Banachverband definiert.
Schließlich bilden alle nichtkommutativen C^*-Algebren Banachräume mit erzeugendem und normalem Kegel, die keine Banachverbände sind.

Nachdem wir einige der auftretenden Räume vorgestellt haben, wenden wir uns den positiven Halbgruppen auf geordneten Banachräumen zu und leiten ein Resultat her, das in speziellerem Rahmen in [10] bewiesen wurde.

1.3 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K) mit Generator A. Dann gilt für alle $x \in K$, $x' \in K'$ und alle $\mu > s(A)$:

(i) $$\langle R(\mu,A)x,x'\rangle = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\mu s}\langle T(s)x,x'\rangle ds,$$

(ii) $$\langle R(\mu,A)^{n+1}x,x'\rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t s^n e^{-\mu s}\langle T(s)x,x'\rangle ds$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis: (i): Ist $\lambda > \omega$, so gilt nach 0.15 für $x \in E$ und für $n \geq 0$: $$R(\lambda,A)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)x\,ds.$$

Wählt man nun $\mu \in \mathbb{R}$ so, daß $s(A) < \mu \leq \lambda$ ist, dann folgt für $x \in K$ und $x' \in K'$:

$$\begin{aligned}
\langle R(\mu,A)x,x'\rangle &= \sum_{n=0}^\infty (\lambda-\mu)^n \langle R(\lambda,A)^{n+1}x,x'\rangle \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty (\lambda-\mu)^n s^n e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (\lambda-\mu)^n s^n e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s}\langle T(s)x,x'\rangle ds.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die Vertauschbarkeit von Summation und Integration aus dem Satz von der monotonen Konvergenz.

(ii): Aus (i) erhält man für $\mu > s(A)$ und $x \in K$, $x' \in K'$ die Gleichung

$$\frac{d}{d\mu} \langle R(\mu,A)x,x' \rangle = \frac{d}{d\mu} \int_0^\infty e^{-\mu s} \langle T(s)x,x' \rangle ds$$

$$= - \int_0^\infty s e^{-\mu s} \langle T(s)x,x' \rangle ds.$$

Vollständige Induktion führt zu

$$\frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}} \langle R(\mu,A)x,x' \rangle = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\mu s} s^n \langle T(s)x,x' \rangle ds.$$

Weil bekanntlich $\frac{d^n}{d\mu^n} R(\mu,A) = (-1)^n \, n! \, R(\mu,A)^n$ ist,

ergibt sich die behauptete Gleichung

$$\langle R(\mu,A)^{n+1}x,x' \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\mu s} \langle T(s)x,x' \rangle ds.$$

§2 Die schwache Kegelspektralschranke $s_K(A)$

Um die Spektralschranke $s(A) = \sup \{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in \sigma(A)\}$ eines positiven Generators auf einem geordneten Banachraum (E,K) in Abhängigkeit vom Kegel K und dem dualen Kegel K' setzen zu können, ist es notwendig, auf eine andere Darstellung von $s(A)$ auszuweichen. Eine Möglichkeit dafür bietet die Holomorphie der Resolventenabbildung $\mu \to R(\mu,A)$; bekanntlich ist $s(A) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}:$ $\mu \to R(\mu,A)$ ist in der Halbebene $\{\mu \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}\ \mu > \lambda\}$ holomorph$\}$. Nun kann man auf folgende Weise in Abhängigkeit von K und K' die "schwache Kegelspektralschranke" definieren:

2.1 Definition: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Dann heißt

$h_{x,x'} :=$ $\inf \{\lambda \in \mathbb{R}: \mu \to \langle R(\mu,A)x,x' \rangle$ ist holomorph in die Halbebene $\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}\ \mu > \lambda\}$ fortsetzbar$\}$ schwache Holomorphieabszisse bezüglich x und x' und

$s_K(A) :=$ $\sup \{h_{x,x'}: x \in K, x' \in K'\}$ schwache Kegelspektralschranke von A.

Diese Definition läßt sofort den Schluß zu, daß die schwache Kegelspektralschranke von der Spektralschranke majorisiert wird.

2.2 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Dann ist $s_K(A) \leq s(A)$.

Die folgenden Überlegungen befassen sich damit, die schwache Kegelspektralschranke genauer zu charakterisieren und andere Möglichkeiten für ihre Darstellung zu finden. Diese ergeben sich vor allem mit Hilfe von Begriffen aus der Theorie der Laplacetransformation:

2.3 Definition: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K). Für $x \in K$ und $x' \in K'$ heißt

$$\alpha_{x,x'} := \inf \{\lambda \in \mathbb{R}: \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds \text{ existiert}\}$$

Konvergenzabszisse von $s \to \langle T(s)x,x'\rangle$.

2.4 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Dann ist $s_K(A) = \sup \{\alpha_{x,x'} : x \in K, x' \in K'\}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für alle $x \in K$ und $x' \in K'$ die Holomorphieabszisse $h_{x,x'}$ und die Konvergenzabszisse $\alpha_{x,x'}$ übereinstimmen. Wir folgen dabei dem Gedankengang in [6, 3.4].

Zunächst zeigen wir, daß $h_{x,x'} \leq \alpha_{x,x'}$ ist. Dazu sei $x \in K$ und $x' \in K'$. Ist nun $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mu > \alpha_{x,x'}$, so ist das Integral $\int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \mu$ existent. Die Funktion $\lambda \to \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds$

ist als Laplacetransformierte von $s \to \langle T(s)x,x' \rangle$ in $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > \mu\}$ holomorph und stimmt nach 1.3 im Gebiet $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > s(A)\}$ mit $\lambda \to \langle R(\lambda,A)x,x' \rangle$ überein. Das bedeutet, daß die Funktion $\lambda \to \langle R(\lambda,A)x,x' \rangle$ in die Halbebene $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > \mu\}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Folglich ist $\mu \geq h_{x,x'}$ und daher $\alpha_{x,x'} \geq h_{x,x'}$.
Wir zeigen nun, daß die Laplacetransformierte f von $s \to \langle T(s)x,x' \rangle$ an der Stelle $\alpha_{x,x'}$ singulär ist, Daraus folgt dann, daß die Funktion $\lambda \to \langle R(\lambda,A)x,x' \rangle$ in keine größere Halbebene als $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > \alpha_{x,x'}\}$ fortsetzbar ist, so daß $\alpha_{x,x'}$ und $h_{x,x'}$ übereinstimmen müssen.
Angenommen f wäre an der Stelle $\alpha_{x,x'}$ regulär. Dann ließe sich f an einer reellen Stelle $\alpha_{x,x'} + r$ $(r > 0)$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha_{x,x'} + r)(\lambda - \alpha_{x,x'} - r)^n,$$

die noch in einer hinreichend nahe gelegenen Stelle $\alpha_{x,x'} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ konvergieren würde:

$$f(\alpha_{x,x'} - \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha_{x,x'} + r)(-r-\varepsilon)^n.$$

Nun gilt für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \alpha_{x,x'}$:

$$f^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} s^n \langle T(s)x,x' \rangle ds, \text{ folglich}$$

$$f(\alpha_{x,x'} - \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_{x,x'} + r)s} s^n \langle T(s)x,x' \rangle (r + \varepsilon)^n ds.$$

Da die Integranden positiv sind, kann der Satz von der

monotonen Konvergenz angewendet werden:

$$f(\alpha_{x,x'}-\varepsilon) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} s^n (r+\varepsilon)^n e^{-(\alpha_{x,x'}+r)s} \langle T(s)x,x'\rangle ds$$

$$= \int_0^\infty e^{(r+\varepsilon)s} e^{-(\alpha_{x,x'}+r)s} \langle T(s)x,x'\rangle ds$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\alpha_{x,x'}-\varepsilon)s} \langle T(s)x,x'\rangle ds.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Definition von $\alpha_{x,x'}$. Infolgedessen ist $\alpha_{x,x'} = h_{x,x'}$.

Die Vorteile der Darstellung der schwachen Kegelspektralschranke in 2.4 gegenüber 2.1 liegen im wesentlichen auf rechnerischem Gebiet. Unter anderem läßt sich mit Hilfe von 2.4 eine Formel für $s_K(A)$ angeben, die - unter gewissen Voraussetzungen - zu einer Formel für $s(A)$ führt (siehe 4.6).

2.5 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K) mit Generator A. Dann gilt für alle $\lambda > s(A)$:

$$s_K(A) = \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle : x\in K,\ x'\in K'\}.$$

Beweis: Der Beweis beruht darauf, zu zeigen, daß für alle $x \in K$ und $x' \in K'$ die Konvergenzabszisse $\alpha_{x,x'}$ mit $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle$ übereinstimmt. Die Behauptung ergibt sich dann aus 2.4. O.B.d.A. kann $\lambda = 0$ gewählt werden (sonst betrachtet man die Halbgruppe

$S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$). Wir folgen nun dem Gedankengang in [6, 2.2].

Sei $x \in K$ und $x' \in K'$. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $\alpha := \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle$ und zeigen zunächst, daß $\alpha \geq \alpha_{x,x'}$ ist.

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ergibt sich durch partielle Integration:

$$(\times) \qquad \int_0^t e^{-(\alpha+\varepsilon)s}\langle T(s)x,x' \rangle ds = -e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle + \langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle - (\alpha+\varepsilon) \int_0^t e^{-(\alpha+\varepsilon)s}\langle R(0,A)T(s)x,x' \rangle ds$$

Dabei wurde benutzt, daß $\langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle = \int_t^\infty \langle T(s)x,x' \rangle ds$ ist. Die Definition von α garantiert, daß von einem bestimmten $t_o > 0$ an für alle $t > t_o$

$\frac{1}{t} \log \langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Also ist

$\langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle < e^{(\alpha+\frac{\varepsilon}{2})t}$ und daher

$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\langle R(0,A)T(t)x,x' \rangle < e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}$ für alle $t > t_o$.

Das bedeutet aber, daß der Grenzwert für $t \to \infty$ auf der rechten und damit auch auf der linken Seite der Gleichung $(\times)$ existiert. Infolgedessen muß $\alpha+\varepsilon \geq \alpha_{x,x'}$ sein. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\alpha \geq \alpha_{x,x'}$.

Für den Nachweis der umgekehrten Ungleichung sei wiederum $x \in K$, $x' \in K'$ und o.B.d.A. $\lambda = 0$; nun wählen wir $\mu \in \mathbb{R}$ so, daß $0 > \mu > \alpha_{x,x'}$ ist. Führt man die Funktion f durch $f(t) = \int_0^t e^{-\mu s}\langle T(s)x,x' \rangle ds$ ein, so ergibt sich

durch partielle Integration:

$$\langle R(0,A)T(t)x,x'\rangle = \int_t^\infty e^{\mu s}\langle e^{-\mu s}T(s)x,x'\rangle ds$$

$$= e^{\mu s}f(s)\Big|_t^\infty - \int_t^\infty e^{\mu s}f(s)ds.$$

Da f stetig ist und $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert, gibt es eine Konstante $M \geq 0$, die f majorisiert: $f(t) \leq M$ für alle $t \geq 0$. Weil $\mu < 0$ ist, konvergiert $e^{\mu t}f(t)$ für $t \to \infty$ gegen 0. Dies erlaubt die Abschätzung

$$\langle R(0,A)x,x'\rangle \leq Me^{\mu t} - \mu M\int_t^\infty e^{\mu s}ds = 2Me^{\mu t}.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so wird der Wert 2M von einem gewissen $t_o > 0$ an durch $e^{\varepsilon t}$ majorisiert, so daß für $t > t_o$ die Ungleichung $\langle R(0,A)T(t)x,x'\rangle \leq e^{(\mu+\varepsilon)t}$ entsteht. Das bedeutet aber, daß $\frac{1}{t}\log\langle R(0,A)T(t)x,x'\rangle \leq \mu + \varepsilon$ ist (für $t > t_o$), so daß man $\alpha \leq \mu$ und damit auch $\alpha \leq \alpha_{x,x'}$ erhält. Also ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Stattet man den Kegel K mit zusätzlichen Eigenschaften aus, so ergeben sich die folgenden Aussagen:

2.6 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K) mit Generator A.

(i) Wenn K normal ist, so ist für alle $\lambda > s(A)$

$$s_K(A) = \sup\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\|R(\lambda,A)T(t)x\| : x \in K\}.$$

(ii) Ist K erzeugend und normal, so ist

$$s_K(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)\| \quad \text{(für } \lambda > s(A)\text{)}.$$

Beweis: (i): Sei $\lambda > s(A)$. Der einfacheren Schreibweise wegen setzen wir $\alpha := \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\| : x\in K\}$. Dann wird $s_K(A)$ von α majorisiert, weil für $x \in K$ und $x' \in K'$ stets folgende Ungleichung gilt:
$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\|$.
Wählt man nun $\mu > s_K(A)$, so gibt es zu $x \in K$ und $x' \in K'$ ein $t_o(x,x') \geq 0$, so daß für alle $t > t_o(x,x')$ $\mu > \frac{1}{t} \log \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle$ ist. Die Stetigkeit der Funktion $t \to \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle$ bewirkt die Existenz einer Konstanten $M(x,x') > 0$, so daß für alle $t \geq 0$ $\langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle \leq M(x,x')e^{\mu t}$ gilt. Da K nach Voraussetzung normal, also K' erzeugend ist, folgert man nun aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, daß es eine Konstante $M(x) > 0$ gibt, so daß für alle $x \in K$ $\|R(\lambda,A)T(t)x\| \leq M(x)e^{\mu t}$ ist. Daraus erhalten wir $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\| \leq \mu$ für alle $x \in K$, also $\alpha \leq \mu$. Infolgedessen ist $\alpha \leq s_K(A)$.

(ii): Der Beweis wird wie in (i) geführt und beruht wiederum auf dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Das folgende Beispiel zeigt, daß selbst für positive Halbgruppen auf geordneten Banachräumen mit totalem Kegel i.a. $s_K(A) < s(A)$ ist:

2.7 Beispiel: Sei E der mit der Norm $\|f\| = \int_0^\infty |f(s)|e^{-s}ds$ versehene Banachraum $L^1(\mathbb{R}^+, e^{-s}ds)$. Als Kegel wählen wir $K := \{f \in E: f = t \cdot g$ für ein $t \geq 0$ und ein $g \in [\mathbf{1}, 2\cdot\mathbf{1}]\}$, wobei $\mathbf{1}$ die Funktion ist, die f.ü. den Wert 1 annimmt. K ist ein abgeschlossener, totaler und normaler Kegel in E (s. 1.2). Betrachtet man auf E die Translationshalbgruppe $T(t)f(s) = f(s+t)$, so ist dies eine positive Halbgruppe mit Generator A, der durch $Af = f'$ ($f \in D(A)$) definiert ist. Alle $\lambda < 1$ sind Elemente des Punktspektrums von A mit den zugehörigen Eigenvektoren $f(t) = e^{\lambda t}$. Die Wachstumsschranke ω ergibt sich zu 1 (da $\|T(t)\| = e^t$ für alle $t \geq 0$), so daß man $s(A) = \omega = 1$ erhält.
Ist nun $f \in K$, so existiert $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)f,h\rangle ds$ (für $h \in K'$) für alle $\lambda > 0$ (denn es gibt eine Konstante $M>0$, so daß $f(s) \leq M$ f.ü. ist, also gilt die Abschätzung $\int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)f,h\rangle ds \leq \int_0^t e^{-\lambda s}ds \cdot M\|h\|$ (für $h \in K'$). Dieser letzte Ausdruck konvergiert aber für $t \to \infty$ genau dann, wenn $\lambda > 0$ ist.). Folglich muß nach 2.4 $s_K(A) \leq 0$ sein. Setzt man $f = \mathbf{1}$ und $h = \mathbf{1}$, so ist $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)f,h\rangle ds = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}ds$. Da dieser Grenzwert genau dann existiert, wenn $\lambda > 0$ ist, erhält man $s_K(A) = 0$.

§3 Untere Schranken für $s_K(A)$

Dieser dritte Paragraph hat im wesentlichen vorbereitende Funktion für §4. Ziel der Überlegungen ist es, untere Schranken für die schwache Kegelspektralschranke herzuleiten. Diese erweisen sich bei der in §4 gestellten Frage danach, wann s(A) ein Spektralwert ist, als nützliche Hilfsmittel.

Zunächst entwickeln wir den Begriff der peripheren Spektralmenge für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren (3.2). Dabei folgen wir dem Gedankengang in [29], wo eine entsprechende Definition für beschränkte Operatoren getroffen wurde. Anschließend stellen wir in 3.4 einige untere Schranken für $s_K(A)$ vor.

Wesentlicher Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen sind die linearen Abbildungen

$$f_{x',\lambda}: \quad K\text{-}K \to \mathbb{R}$$

$$x \to \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds \qquad (\text{für } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda > s_K(A) \text{ und } x' \in K')$$

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\rho_\infty(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}\lambda > s(A)\}$,

$\rho_\infty(A)_s :=$ Zusammenhangskomponente von $\rho_\infty(A)$ in der Menge $\{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in \rho(A) \text{ und } \operatorname{Re}\lambda > s\}$ für $-\infty \leq s \leq s(A)$.

3.1 Lemma: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > s_K(A)$ gelten folgende Aussagen:

(i) Ist $\lambda \in \rho_\infty(A)_{s_K(A)}$, so ist für alle $x \in K$ und $x' \in K'$ $f_{x',\lambda}(x) = \langle R(\lambda,A)x,x' \rangle$.

(ii) Ist K erzeugend, so ist $f_{x',\lambda}$ für alle $x' \in K'$ eine stetige Linearform auf E. In diesem Fall ist $f_{x',\lambda} \in D(A')$ und $(\lambda-A')f_{x',\lambda} = x'$. Falls λ zusätzlich aus der Resolventenmenge von A ist, so gilt für alle $x' \in K'$: $f_{x',\lambda} = R(\lambda,A')x'$.

Beweis: (i) Weil die Abbildung $\lambda \to f_{x',\lambda}(x)$ für $x \in K$ und $x' \in K'$ gerade die Laplacetransformierte der Funktion $t \to \langle T(t)x,x' \rangle$ ist, ist die Abbildung $\lambda \to f_{x',\lambda}(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > s_K(A)$ holomorph. Im Gebiet $\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}\,\lambda > s(A)\}$ stimmen die holomorphen Funktionen $\lambda \to f_{x',\lambda}(x)$ und $\lambda \to \langle R(\lambda,A)x,x' \rangle$ überein (1.3), daher sind sie nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen auch in $\rho_\infty(A)_{s_K(A)}$ gleich.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_{x',\lambda,n}(x) = \int_0^n e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x' \rangle ds$ $(x \in E)$. Dann gilt für alle $x \in E$: $\lim_{n\to\infty} f_{x',\lambda,n}(x) = f_{x',\lambda}(x)$. Daher ist die Linearform $f_{x',\lambda}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus auf E stetig.

Außerdem gilt für $x \in D(A)$:

$$(\lambda-A')f_{x',\lambda}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle T(s)(\lambda-A)x,x' \rangle ds = \langle x,x' \rangle.$$

Falls $\lambda \in \rho(A)$ ist, gilt demnach für alle $x' \in K'$ $f_{x',\lambda} = R(\lambda,A')x'$.

Ein Hilfsmittel für die Berechnung unterer Schranken von $s_K(A)$ stellen gewisse kompakte Spektralmengen von A dar. Analog zu [29, 1.4] definieren wir:

3.2 Definition: Sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf einem Banachraum E und σ eine kompakte Spektralmenge von A.
σ heißt periphere Spektralmenge von A, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine in $\mathbb{C}$ offene Menge U_ε mit Rand B_ε gibt, so daß folgendes gilt:

1. $B_\varepsilon \cup U_\varepsilon$ ist im Komplement von $\sigma(A) \setminus \sigma$ enthalten,
2. B_ε besteht aus endlich vielen im positiven Sinne orientierten, rektifizierbaren Jordankurven,
3. für $m_\sigma := \inf \{\mathrm{Re}\ z: z \in \sigma\}$ gilt: $B_\varepsilon \subseteq \rho_\infty(A)_{m_\sigma - \varepsilon}$,
4. $m_\sigma := \inf \{\mathrm{Re}\ z: z \in U_\varepsilon\} > m_\sigma - \varepsilon$.

3.3 Beispiele: (i) Ist A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf dem Banachraum E, so sind alle isolierten Singularitäten der Resolvente $R(\lambda, A)$, deren Realteil gleich der Spektralschranke ist, periphere Spektralmengen.
(ii) Sei A ein beschränkter linearer Operator mit $\sigma(A) = [-2,-1] \cup \{0\}$. Dann sind $[-2,-1]$ und $\{0\}$ periphere Spektralmengen von A.
(iii) Sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit $\sigma(A) = [-2,-1] \cup \{it: t \in \mathbb{R}\}$. Dann besitzt A keine peripheren Spektralmengen.

(iv): Sei A ein beschränkter, linearer Operator mit

$$\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C}: 0 \leq \mathrm{Re}\ z \leq 1,\ 1 \leq |\mathrm{Im}\ z| \leq 2\}$$
$$\cup\{z \in \mathbb{C}: 1 \leq \mathrm{Re}\ z \leq 2,\ 0 \leq |\mathrm{Im}\ z| \leq 2\} \cup \{\tfrac{1}{2}\} \cup \{-1\}.$$

Dann ist $\{-1\}$ eine periphere und $\{\frac{1}{2}\}$ keine periphere Spektralmenge von A.

Mit $\sum(A)$ bezeichnen wir die Menge der kompakten Spektralmengen von A, mit $\sum_p(A)$ die Menge der peripheren Spektralmengen. Es ergeben sich nun folgende untere Schranken für $s_K(A)$:

3.4 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Folgende Werte (mit den Bezeichnungen von 3.2) sind untere Schranken für $s_K(A)$:

(i) Wenn K total und $\sum_p(A) \neq \emptyset$ ist, dann ist $s_K(A) \geq \sup\{m_\sigma: \sigma \in \sum_p(A)\}$.

(ii) Wenn K erzeugend und $\sum(A) \neq \emptyset$ ist, dann ist $s_K(A) \geq \sup\{m_\sigma: \sigma \in \sum(A)\}$.

(iii) Wenn K erzeugend und das Punktspektrum $P\sigma(A) \neq \emptyset$ ist, dann ist $s_K(A) \geq \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\}$.

(iv) K sei total, die zu A gehörende Halbgruppe sei beschränkt, und es gelte $\omega = s(A)$. Gibt es ein $\mu \in P\sigma(A)$ mit $\mathrm{Re}\ \mu = s(A)$, so ist $s_K(A) = s(A)$.

Beweis: (i): Sei $\sigma \in \sum_p(A)$ und $m_\sigma = \inf\{\mathrm{Re}\ z: z \in \sigma\}$.

Wegen der Kompaktheit von σ ist $m_\sigma > -\infty$. Es genügt zu zeigen, daß m_σ von $s_K(A)$ majorisiert wird. Zum Beweis nehmen wir an, daß $s_K(A) < m_\sigma$ ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $m_\sigma - \varepsilon > s_K(A)$ ist. Nach der Definition der peripheren Spektralmenge existiert zu diesem ε eine offene Menge $U_\varepsilon \subseteq \mathbb{C}$ mit Rand B_ε, so daß für die zu σ gehörende Spektralprojektion gilt:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\varepsilon} R(\lambda,A)d\lambda, \quad B_\varepsilon \subseteq \rho_\infty(A)_{s_K(A)} \quad \text{und} \quad m_\varepsilon > s_K(A)$$

mit $m_\varepsilon = \inf \{\mathrm{Re}\ z: z \in U_\varepsilon\}$. Für $x \in K$ und $x' \in K'$ ergibt sich nun nach 3.1 (i):

$$\langle Px,x'\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\varepsilon} \langle R(\lambda,A)x,x'\rangle d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\varepsilon} f_{x',\lambda}(x)d\lambda = 0$$

(eine Folge des Cauchyschen Integralsatzes, denn für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\ \lambda > s_K(A)$ ist $\lambda \to f_{x',\lambda}(x)$ holomorph). Weil K total ist und K' die Punkte von E trennt (0.4), muß $P = 0$ sein. Da dies nicht stattfinden kann, ist $s_K(A) \geq m_\sigma$.

(ii): Sei $\sigma \in \sum(A)$ und $m_\sigma = \inf \{\mathrm{Re}\ z: z \in \sigma\}$. Wenn $s_K(A) < m_\sigma$ wäre, so gäbe es eine zulässige Darstellung von der zu σ gehörenden Spektralprojektion P in der Form $P = \frac{1}{2\pi i} \int_B R(\lambda,A)d\lambda$, wobei B und das Innengebiet von B ganz im Komplement von $\sigma(A) \setminus \sigma$ liegen (s. [7]). Aus 3.1 (ii) und dem Cauchyschen Integralsatz ergibt sich nun für $x \in K$ und $x' \in K'$:

$$\langle Px,x'\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_B \langle R(\lambda,A)x,x'\rangle d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_B f_{x',\lambda}(x)d\lambda = 0.$$

Weil K erzeugend ist und K' die Punkte von E trennt, wäre dann P = 0, was nicht möglich ist. Also muß $s_K(A) \geq m_\sigma$ sein.

(iii): Sei z ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h. $Az = \lambda z$. Aus 0.12 folgt dann für alle $t \geq 0$: $T(t)z = e^{\lambda t}z$. Weil K' die Punkte von E trennt, existiert ein $x' \in K'$ mit $|\langle z,x'\rangle| = 1$. Wäre nun $\mathrm{Re}\,\lambda > s_K(A)$, so müßte (da K erzeugend ist) die Funktion $t \to e^{-\lambda t}\langle T(t)z,x'\rangle = \langle z,x'\rangle$ ein Element aus $L^1(\mathbb{R}^+)$, also absolut integrierbar sein. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch, da $|\langle z,x'\rangle| = 1$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathrm{Re}\,\lambda \leq s_K(A)$ ist.

(iv): O.B.d.A. sei $s(A) = 0$. Wäre $s_K(A) < 0$, so gäbe es ein $w \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $s_K(A) < w < 0$. Für alle $x \in K$, $x' \in K'$ und beliebiges $\lambda > s(A)$ ist nun (nach 2.5) von einem gewissen $t_o > 0$ an $0 \leq \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle \leq e^{wt}$. Weil $w < 0$ ist, erhalten wir $\lim_{t\to\infty} \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle = 0$. (×)

Sei nun $y \in E$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ ($\mathrm{Re}\,\mu = 0$). Dann gilt für alle $t \geq 0$: $T(t)y = e^{\mu t}y$. Weil K' die Punkte von E trennt (0.4), gibt es ein $x' \in K'$, so daß $|\langle R(\lambda,A)y,x'\rangle| = 1$ ist. Für alle $t \geq 0$ entsteht die Gleichung $|\langle R(\lambda,A)T(t)y,x'\rangle| = |\langle e^{\mu t}R(\lambda,A)y,x'\rangle| = 1$. (××)

Weiterhin gilt für $x \in K-K$:

$$|\langle R(\lambda,A)T(t)y,x'\rangle - \langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle| \leq \|R(\lambda,A)T(t)\|\|y-x\|\|x'\|.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung ist, da die Halbgruppe nach Voraussetzung beschränkt ist, für alle $t \geq 0$ gleichmäßig beschränkt und kann, da K total ist, beliebig klein werden (für passend gewähltes $y \in K$). Dies ist aber widerspruchsvoll, da andererseits die Gleichungen (×) und (××) erfüllt sein müssen. Folglich stimmen $s_K(A)$ und $s(A)$ überein.

3.5 Korollar: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Wenn K total ist und die Resolvente von A auf der Spektralschrankenlinie $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z = s(A)\}$ eine isolierte Singularität besitzt, so ist $s_K(A) = s(A)$.

Beweis: Jede isolierte Singularität auf der Linie $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z = s(A)\}$ ist eine periphere Spektralmenge, also folgt die Behauptung aus 3.4 (i).

3.6 Beispiel: Sei (E,K) der in 2.7 definierte geordnete Banachraum und $\{T(t)\}$ die Translationshalbgruppe auf E. Dann ist nach den Ausführungen in 2.7 $\sup \{\operatorname{Re} \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\} = 1$, aber $s_K(A) = 0$. Dies zeigt, daß die Voraussetzung "K ist erzeugend" in 3.4 (iii) unentbehrlich ist.

§4 Reelle Spektralwerte des Generators

Wir befassen uns in diesem Paragraphen mit den folgenden drei einem positiven Generator A zugeordneten Werten: der schwachen Kegelspektralschranke $s_K(A)$, der Spektralschranke $s(A)$ und der noch zu definierenden Positivitätsschranke $p(A)$. Untersucht wird die Frage, unter welchen Voraussetzungen diese Werte im Spektrum von A liegen. Es zeigt sich dabei zunächst, daß $p(A)$ immer ein Spektralwert ist (4.2). Wird der Kegel K als erzeugend vorausgesetzt, so gilt dies ebenfalls für $s_K(A)$ (4.4). Ist der Kegel schließlich erzeugend und normal, so liegt auch $s(A)$ im Spektrum von A (4.5). In diesem letzten Fall erhält man sogar eine Formel für die Spektralschranke, die analog zur Wachstumsschranke $\omega = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|$ gebaut ist (4.6).
In 4.7 stellen wir die Voraussetzungen zusammen, unter denen $s(A)$ ein Spektralwert ist; es sind Bedingungen, die sich aus den Ergebnissen in §3 herleiten lassen. Schließlich betrachten wir den Fall, daß $s_K(A)$ ein Pol der Resolvente von A ist und übertragen Resultate, die für den Spektralradius und den schwachen Kegelspektralradius bekannt sind, in entsprechender Weise auf die Situation positiver Generatoren (4.8 und 4.9).

Wesentlicher Ausgangspunkt für die folgenden Überlegun-

gen ist die Untersuchung, wann die Resolventenabbildung $\lambda \to R(\lambda,A)$: $\rho(A)\cap\mathbb{R} \to \mathfrak{L}(E)$ positiv ist. Wir gehen von folgender Definition aus:

4.1 Definition: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Dann heißt $p(A) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}\cap\rho(A): R(\lambda,A) \geq 0\}$ Positivitätsschranke von A.

Die Positivitätsschranke zeichnet sich hauptsächlich durch zwei Eigenschaften aus, die sich für das weitere Vorgehen als vorteilhaft erweisen: zum einen läßt sie sich durch die Spektralschranke und die schwache Kegelspektralschranke eingrenzen, zum andern liegt sie stets im Spektrum von A, wenn sie endlich ist:

4.2 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $p(A) \in \sigma(A)$, wenn p(A) endlich ist und

(ii) $s_K(A) \leq p(A) \leq s(A)$.

Beweis: (i) Wir nehmen an, daß $p(A) > -\infty$ ist und nicht im Spektrum von A liegt. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften: $\lambda_n \in \mathbb{R}\cap\rho(A)$ und $\lambda_n > p(A)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = p(A)$. Nun ist $R(p(A),A) = \lim_{n\to\infty} R(\lambda_n,A)$ ein positiver Operator. Wählt man $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $p(A) - \|R(p(A),A)\|^{-1} < \lambda < p(A)$ ist,

so ergibt sich aus 0.17

$R(\lambda,A) = \sum_{n=0}^{\infty} R(p(A),A)^{n+1}(p(A)-\lambda)^n \geqq 0$, was der Definition von $p(A)$ widerspricht. Also ist $p(A) \in \sigma(A)$.

(ii): Aus (i) folgt, daß stets die Ungleichung $p(A) \leqq s(A)$ gilt. Ist $s_K(A) = -\infty$, so ergibt sich sofort die Behauptung: $s_K(A) \leqq p(A) \leqq s(A)$.
Wir nehmen nun an, daß $s_K(A)$ endlich und $p(A)$ echt kleiner als $s_K(A)$ ist. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ mit der Eigenschaft $p(A) < \lambda < s_K(A)$. Weil $R(\lambda,A)$ ein positiver Operator ist, gilt nach 0.13 für $x \in K$ und $x' \in K'$:

$$\langle R(\lambda,A)x,x'\rangle = \int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds + e^{-\lambda t}\langle R(\lambda,A)T(t)x,x'\rangle$$

$$\geqq \int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds.$$

Diese Abschätzung zeigt, daß für alle $x \in K$ und $x' \in K'$ $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}\langle T(s)x,x'\rangle ds$ existiert. Dies steht aber nach 2.4 im Widerspruch zu $\lambda < s_K(A)$. Infolgedessen muß $p(A) \geqq s_K(A)$ sein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.3 Beispiel: Für den in 2.7 vorgestellten Operator gilt, wie man leicht nachrechnet, $s_K(A) = 0$ und $p(A) = s(A) = 1$. Also ist in diesem Fall $s_K(A) < p(A)$.

Wählt man den Banachraum E spezieller und setzt zusätzlich voraus, daß K erzeugend ist, so erhält man außer

$p(A)$ auch $s_K(A)$ als Spektralwert von A:

4.4 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K), K sei erzeugend. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ ist $R(\lambda,A)$ genau dann positiv, wenn λ größer als die schwache Kegelspektralschranke ist.

(ii) Wenn $s_K(A)$ endlich ist, liegt $s_K(A)$ im Spektrum von A.

Beweis: (i): Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \rho(A)$. Wenn $R(\lambda,A)$ positiv ist, folgt aus 4.2, daß $\lambda > s_K(A)$ ist. Nehmen wir nun an, daß $\lambda > s_K(A)$ und $\lambda \in \rho(A)$ ist, so ist nach 3.1 die Abbildung $f_{x',\lambda}$, die durch $x \to \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle T(s)x,x' \rangle ds$ gegeben ist, für alle $x' \in K'$ eine positive stetige Linearform auf E, die der Gleichung $f_{x',\lambda} = R(\lambda,A)x'$ genügt. Daraus geht unmittelbar hervor, daß für alle $x \in K$ und alle $x' \in K'$ $\langle R(\lambda,A)x,x' \rangle \geq 0$ ist. Folglich ist $R(\lambda,A)$ positiv und daher $\lambda > p(A)$.

(ii): Wir nehmen an, daß $s_K(A)$ endlich ist und nicht im Spektrum von A liegt. Dann gibt es ein $\lambda \in \rho(A)$, so daß $\lambda > s_K(A)$ und $|\lambda - s_K(A)| < |R(\lambda,A)|^{-1}$ ist. Weil $R(\lambda,A)$ nach (i) positiv ist, muß auch

$R(s_K(A),A) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda,A)^{n+1}(\lambda - s_K(A))^n$ positiv sein, was aber ein Widerspruch zu (i) ist. Infolgedessen liegt $s_K(A)$ im Spektrum von A.

Gehen wir in dieser Richtung weiter und fordern außerdem, daß der Kegel K in E normal ist, so ergibt sich schließlich auch s(A) als Spektralwert. Dies wurde bereits von G. Greiner, J. Voigt und M. Wolff in [10] - allerdings mit anderen Methoden - gezeigt.

4.5 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K). Wenn K erzeugend und normal ist, dann ist $s_K(A) = s(A)$. Ist $\sigma(A) \neq \emptyset$, so liegt s(A) im Spektrum von A.

Beweis: Nach 2.2 gilt stets die Ungleichung $s_K(A) \leq s(A)$. Wir nehmen nun an, daß s(A) endlich ist (sonst ist auf jeden Fall $s_K(A) = s(A)$). Wäre $s_K(A) < s(A)$, dann gäbe es ein λ aus dem Rand des Spektrums, so daß $s_K(A) < \mathrm{Re}\ \lambda$ ist. Zu diesem λ existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Resolventenmenge, die gegen λ konvergiert. Folglich strebt $\|R(\lambda_n,A)\|$ gegen ∞. Weil K erzeugend und normal ist, gibt es ein $x \in K$ und ein $x' \in K'$, so daß $\langle R(\lambda_n,A)x,x'\rangle$ gegen ∞ konvergiert (eine Folge des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit). Nach Wahl der Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_o$ $\mathrm{Re}\ \lambda_n > s_K(A)$ ist. Das bedeutet aber, daß das Integral $\int_0^\infty e^{-\lambda_n t}\langle T(t)x,x'\rangle dt$ für alle $n \geq n_o$ existiert und nach 3.1(i) mit $f_{x',\lambda}(x)$ übereinstimmt. Aus Stetigkeitsgründen ist $\lim_{n\to\infty} |f_{x',\lambda_n}(x)| = |f_{x',\lambda}(x)| < \infty$. Andererseits ist $f_{x',\lambda_n}(x) = \langle R(\lambda_n,A)x,x'\rangle$. Dies ergibt jedoch

einen Widerspruch, infolgedessen muß $s_K(A) = s(A)$ sein. Aus 4.2 folgt nun, daß $p(A) = s_K(A) = s(A) \in \sigma(A)$ ist.

4.6 Korollar: Unter den Voraussetzungen von 4.5 gilt für alle $\lambda > s(A)$:

$$s(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)\|.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus 2.6 und 4.5.

Die obige Formel für $s(A)$ gilt jedoch nur für Generatoren positiver Halbgruppen. In [20] wird in Anlehnung an [32] ein Beispiel einer stark stetigen Halbgruppe konstruiert, für die $s(A) < \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)\| < \omega$ ist.

Wir stellen nun die Frage nach weiteren Voraussetzungen an (E,K) oder die Halbgruppe $\{T(t)\}$, die bewirken, daß $s(A)$ ein Spektralwert von A ist. Eine naheliegende Methode für Untersuchungen dieser Art bietet sich durch Satz 4.2 an: Offensichtlich liegt $s(A)$ im Spektrum von A, wenn $s_K(A)$ und $s(A)$ übereinstimmen und $\sigma(A) \neq \emptyset$ ist. Zusammenfassend gilt daher mit den Bezeichnungen von §3:

4.7 Satz: Ist A ein positiver Generator auf (E,K), so impliziert jede der folgenden Bedingungen, daß $s(A) \in \sigma(A)$ ist:

(i) K ist total, $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ und

$s(A) = \sup \{m_\sigma: \sigma \text{ ist periphere Spektralmenge}\}$,
wobei $m_\sigma = \inf \{\mathrm{Re}\, z: z \in \sigma\}$ ist.

(ii) K ist erzeugend, $\sigma(A) \neq \emptyset$ und
$s(A) = \sup \{m_\sigma: \sigma \text{ ist kompakte Spektralmenge}\}$,

(iii) K ist erzeugend, $P\sigma(A) \neq \emptyset$ und
$s(A) = \sup \{\mathrm{Re}\, \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\}$,

(iv) K ist total, die zu A gehörende Halbgruppe beschränkt und $\omega = s(A)$. Ferner gebe es ein $\mu \in P\sigma(A)$ mit $\mathrm{Re}\, \mu = s(A)$.

(v) K ist erzeugend und normal, $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Beweis: Die Behauptung folgt für (i)-(iv) aus 3.4 und 4.2, da in allen Fällen $s(A) = s_K(A)$, also $s(A) \in \sigma(A)$ ist. Aussage (v) wurde in 4.5 bewiesen.

Ist T ein beschränkter, positiver Operator, dessen Spektralradius r(T) ein Pol der Resolvente $R(\lambda,T)$ ist, so ist dieser Pol bekanntlich von maximaler Ordnung auf $|\lambda| = r(T)$, dem Spektralkreis von T. Wir untersuchen im zweiten Teil dieses Paragraphen den entsprechenden Sachverhalt für positive Generatoren. Es zeigt sich, daß die oben erwähnte Tatsache vollständig auf diese Situation übertragbar ist. Zunächst beweisen wir eine etwas allgemeinere Fassung:

4.8 Satz: A sei ein positiver Generator auf (E,K) und $s_K(A)$ ein Pol der Resolvente. Ist λ ein weiterer

Pol der Resolvente auf der Linie $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} z = s_K(A)\}$, so ist die Ordnung des Pols in λ kleiner oder gleich der Ordnung des Pols in $s_K(A)$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) K ist erzeugend,

(ii) K ist total, $s_K(A)$ und λ sind Häufungspunkte der Zusammenhangskomponente $\rho_\infty(A)_{s_K(A)}$. (siehe §3).

Beweis: O.B.d.A. sei $s_K(A) = 0$. Die Ordnung des Pols in 0 sei m, die Ordnung in λ sei n. Für den Hauptkoeffizienten Q der Laurententwicklung an der Stelle λ gilt: $Q = \lim_{\mu\to 0} (\mu-\lambda)^n R(\mu,A)$. Außerdem ist (da 0 ein Pol der Ordnung m ist) für alle $p \geq 1$: $\lim_{\mu\to 0} \mu^{m+p} R(\mu,A) = 0$. (x)
Ist nun $\mu \in \rho_\infty(A)_{s_K(A)}$ und $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\operatorname{Im}\mu = \lambda$, so ergibt sich nach 3.1 in Fall (i) und (ii) für alle $x \in K$ und $x' \in K'$:

$$|\mu-\lambda|^n |\langle R(\mu,A)x,x'\rangle| = (\operatorname{Re}\mu)^n \left| \int_0^\infty e^{-\mu s}\langle T(s)x,x'\rangle ds \right|$$

$$\leq (\operatorname{Re}\mu)^n \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\mu)s}\langle T(s)x,x'\rangle ds$$

$$= (\operatorname{Re}\mu)^n \langle R(\operatorname{Re}\mu,A)x,x'\rangle.$$

Wäre nun $n > m$, so erhielte man aus dieser Abschätzung und Gleichung (x): $\langle Qx,x'\rangle = 0$ für alle $x \in K$ und alle $x' \in K'$. Weil K' die Punkte in E trennt, ist demnach für alle $x \in K$ $Qx = 0$, was sowohl in Fall (i) als auch in Fall (ii) zu $Q = 0$ führt. Da dies unmöglich ist, muß

$n \leq m$ sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

4.9 Korollar: Sei A ein positiver Generator auf (E,K), K sei total. Ist s(A) ein Pol der Resolvente von A und λ ein weiterer Pol auf der Spektralschrankenlinie $\{z \in C: \mathrm{Re}\ z = s(A)\}$, so ist die Ordnung von λ kleiner oder gleich der Ordnung des Pols in s(A).

Beweis: Unter diesen Voraussetzungen ist nach 3.5 $s_K(A) = s(A)$, so daß 4.8 angewendet werden kann.

§5 Die induzierten Operatoren $\{T(t)_K\}$

In diesem Paragraphen wird untersucht, inwieweit das Spektrum des Generators einer positiven Halbgruppe $\{T(t)\}$ allein durch ihr Verhalten auf dem positiven Kegel K bestimmt wird.

Dazu wird auf dem linearen Teilraum $E_K := K-K$ von E durch das Eichfunktional q der konvexen, kreisförmigen Hülle von $U \cap K$ eine Norm definiert. Bezüglich dieser Norm ist E_K ein Banachraum ([23, V.3]). Außerdem stimmen die ursprüngliche und die durch q definierte Norm auf dem positiven Kegel überein. Die Konstruktion ergibt für $x \in E_K$:

$q(x) = \inf \{\|x_1\| + \|x_2\| : x_1, x_2 \in K \text{ und } x = x_1 - x_2\}$,

wobei $\|\cdot\|$ die ursprüngliche Norm in E bezeichnet.

Ist der Teilraum K-K in $(E, \|\cdot\|)$ abgeschlossen, so sind (E_K, q) und $(E_K, \|\cdot\|)$ nach dem Banachschen Homomorphiesatz topologisch isomorph. Die interessanten Ergebnisse entstehen daher, wenn K ein totaler, nicht erzeugender Kegel ist. Für diesen Fall stellen wir nun einige Beispiele bereit:

5.1 Beispiele: (i) Sei E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt u. Anstelle des Verbandskegels K_V betrachten wir E mit der Ordnung, die durch den in Beispiel 1.2 definierten Kegel K gegeben ist. K ist ein totaler Ke-

gel, dessen lineare Hülle K-K mit dem Hauptideal $E_u := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n[-u,u]$ übereinstimmt. E_u ist bezüglich der Norm p_u (dem Eichfunktional von $[-u,u]$) vollständig und kann stetig in E eingebettet werden ([24], 7.2 Korollar), d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $x \in E_u$ $\|x\| \leq c p_u(x)$ ist. Benutzt man nun 0.5 (für den Banachraum (E_u,p_u)) und die Eigenschaft, daß die oben definierte Norm q und die ursprüngliche Norm $\|\cdot\|$ von E auf K übereinstimmen, so erhält man für alle $x \in K$ eine Zerlegung $x = x_1 - x_2$ (x_1, $x_2 \in K$ und $p_u(x_i) \leq M p_u(x)$ für eine Konstante $M > 0$ und $i=1,2$), so daß die Ungleichung

$q(x) \leq q(x_1) + q(x_2) = \|x_1\| + \|x_2\|$

$\leq c(p_u(x_1) + p_u(x_2)) \leq 2cM p_u(x)$ entsteht. Dies zeigt, daß p_u und q vergleichbar und folglich nach dem Banachschen Homomorphiesatz äquivalent sind. (E_K,q) ist also topologisch isomorph zu (E_u,p_u).

Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Räumen liegt darin, daß der vom Verbandskegel in E auf E_u induzierte Kegel $(E_u \cap K_V)$ i.a. in E nicht abgeschlossen ist, während der oben definierte Kegel in E (und in (E_K,q)) abgeschlossen, allerdings aber i.a. kein Verbandskegel mehr ist.

(ii) Sei E der Banachraum c_o und K die Menge $K := \{x \in c_o : x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\sum_{i=2}^{n} x_i \leq x_1$ für alle $n \geq 2\}$. K ist ein abgeschlossener, totaler Kegel in c_o, dessen lineare Hülle K-K mit der

Menge $\{x \in c_o : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ übereinstimmt. Dieser Raum ist bezüglich der Norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ vollständig, und die $\|\cdot\|_1$-Norm und die oben konstruierte q-Norm sind äquivalent, denn zu $x \in E_K$ gibt es nach 0.5 $x_1, x_2 \in K$ mit $x = x_1 - x_2$ und $\|x_i\|_1 \leq M\|x\|_1$ (für eine feste Konstante $M > 0$), sodaß die Ungleichung

$q(x) \leq q(x_1) + q(x_2) \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1$
$\leq 2M\|x\|_1$ entsteht. Folglich ist nach dem Banachschen Homomorphiesatz (E_K, q) topologisch isomorph zu $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, anstelle der positiven Halbgruppe $\{T(t)\}$ die Operatoren $\{T(t)_K\}$, d.h. die auf E_K eingeschränkten Operatoren genauer zu untersuchen. Weil der Kegel K in (E_K, q) erzeugend ist, sind diese Operatoren auch auf (E_K, q) stetig. Dies läßt sich durch einfache Rechnungen zeigen, wenn man 0.5 berücksichtigt.
Jedoch ist die Familie $\{T(t)_K\}$ i.a. keine starkstetige Halbgruppe mehr, wie das folgende Beispiel zeigt:

5.2 Beispiel: Sei $E = L^1[0,1]$ und $\mathbb{1}$ die Funktion, die f.ü. konstant 1 ist. Versehen wir E mit der Ordnung, die von dem Kegel $K := \{f \in L^1[0,1]$: es gibt ein $t \geq 0$ und ein $g \in [\mathbb{1}, 2\cdot\mathbb{1}]$, so daß $f = t \cdot g$ ist$\}$ induziert wird, so ist E nach Beispiel 1.2 ein geordneter Banachraum mit einem totalen Kegel. Die lineare Hülle von K stimmt mit den Funktionen aus $L^\infty[0,1]$ (dem Hauptideal $E_{\mathbb{1}}$ des quasiinne-

ren Punkts 1)überein. Da die p_1-Norm mit der Supremumsnorm übereinstimmt, ist (E_K,q) nach 5.1 topologisch isomorph zu dem Raum $(L^\infty[0,1],\|\cdot\|_{sup})$.
Ist nun $\{T(t)\}$ die nilpotente Halbgruppe der Translationen auf $[0,1]$, so ist $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf E, während die Familie $\{T(t)_K\}$ - die Translationen auf $L^\infty[0,1]$ - keine stark stetige Halbgruppe bildet.

Daher betrachten wir anstelle des Raumes E_K den abgeschlossenen Teilraum $\tilde{E}_K := \{x \in E_K: \lim_{t\to 0} q(T(t)x-x) = 0\}$ von E_K. Die auf $\tilde{E}_K$ eingeschränkten Operatoren T(t) bezeichnen wir mit $\tilde{T}(t)_K$. Die Abbildungen $\{\tilde{T}(t)_K\}$ bilden nun offensichtlich eine stark stetige Halbgruppe auf $\tilde{E}_K$. Ihr Generator sei $\tilde{A}_K$, sein Definitionsbereich sei die Menge $D(\tilde{A}_K)$.

5.3 Lemma: $D(\tilde{A}_K) = \{x \in \tilde{E}_K: x \in D(A) \text{ und } Ax \in \tilde{E}_K\}$.

Beweis: Für $\lambda > s(A)$ und $x \in K$ ist nach 0.13 für alle $t \geq 0$: $R(\lambda,A)x \geq \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds$. Daher gilt die Gleichung $\lim_{t\to\infty} \|R(\lambda,A)x - \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds\|$
$= \lim_{t\to\infty} q(R(\lambda,A)x - \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds)$. Infolgedessen ist $R(\lambda,\tilde{A}_K) = \tilde{R}(\lambda,A)_K$, wobei $\tilde{R}(\lambda,A)_K$ den auf $\tilde{E}_K$ eingeschränkten Operator $R(\lambda,A)$ bezeichnet. Nun ist
$D(\tilde{A}_K) = \{R(\lambda,\tilde{A}_K)x: x \in \tilde{E}_K\} = \{R(\lambda,A)x: x \in \tilde{E}_K\}$

$= \{y \in \tilde{E}_K : y \in D(A) \text{ und } Ay \in \tilde{E}_K\}$, da Ay wegen $Ay = AR(\lambda,A)x = \lambda R(\lambda,A)x - x$ ein Element von $\tilde{E}_K$ ist.

5.4 Korollar: Ist die Halbgruppe $\{T(t)_K\}$ auf (E_K,q) stetig, so gilt für den Definitionsbereich ihres Generators A_K:

$$D(A_K) = \{x \in D(A) \cap E_K : Ax \in E_K\}$$
$$= R(\lambda,A)(K-K) \qquad \text{(für alle } \lambda > s(A)\text{)}.$$

Den Raum $\tilde{E}_K$ kann man folgendermaßen darstellen:

5.5 Lemma: $\tilde{E}_K$ ist (für beliebiges $\lambda > s(A)$) der Abschluß von $R(\lambda,A)(K-K)$ bezüglich der q-Norm.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $R(\lambda,A)(K-K)$ in $\tilde{E}_K$ enthalten ist. O.B.d.A. kann $\lambda = 0$ gewählt werden (sonst betrachtet man die Halbgruppe $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$). Für $x \in K$ ist nach 0.13

$$R(0,A)x - T(t)R(0,A)x = \int_0^t T(s)x\,ds \quad \text{ein Element von } K.$$

Weil die q-Norm und die ursprüngliche Norm auf K übereinstimmen, ergibt sich $\lim_{t\to 0} q(R(0,A)x - T(t)R(0,A)x)$ $= \lim_{t\to 0} \|R(0,A)x - T(t)R(0,A)x\| = 0$. Daher ist für alle $x \in K$ $R(0,A)x \in \tilde{E}_K$, also ist $R(0,A)(K-K)$ in $\tilde{E}_K$ enthalten. Mit Hilfe von 5.3 entsteht nun die Kette $D(\tilde{A}_K) = R(0,\tilde{A}_K)\tilde{E}_K \subseteq R(0,A)E_K \subseteq \tilde{E}_K$. Weil $D(\tilde{A}_K)$ bezüglich der q-Norm in $\tilde{E}_K$ dicht ist, folgt die Behauptung.

5.6 Beispiele: (i) Für die in 5.2 angegebene Halbgruppe ist $\tilde{E}_K = \{f \in C[0,1]: f(1) = 0\}$ und $D(\tilde{A}_K) = \{f \in C^1[0,1]: f(1) = 0\}$.

(ii) Sei (E,K) ein geordneter Banachraum, in dem K-K abgeschlossen ist. Dann ist für jede positive Halbgruppe $\{T(t)\}$ die Halbgruppe der Einschränkungen $\{T(t)_K\}$ stark stetig, da die Räume (E_K,q) und $(E_K,\|\cdot\|)$ nach dem Banachschen Homomorphiesatz topologisch isomorph sind. Folglich ist in diesem Fall stets $\tilde{E}_K = E_K$.

(iii) Ist $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K), die der Bedingung $T(t)x \leq x$ für alle $x \in K$ und alle $t \geq 0$ genügt, so ist $\tilde{E}_K = E_K$; denn in diesem Fall ist für alle $x \in K$ und $t \geq 0$ $\quad x - T(t)x \in K$. Also ist $\lim_{t\to 0} q(x - T(t)x) = \lim_{t\to 0} \|x - T(t)x\| = 0$. Weil K in E_K erzeugend ist, ergibt sich die Behauptung.

Ist T ein beschränkter, positiver Operator auf (E,K), so ist $\|T_K\|_q := \sup\{\|Tx\|: x \in K, \|x\| \leq 1\}$ die Operatornorm des auf (E_K,q) induzierten Operators T_K. Es ist stets $\|T_K\|_q \leq \|T\|$. Mit Hilfe dieser Operatornorm ergibt sich folgende Darstellung der schwachen Kegelspektralschranke:

5.7 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K), wobei K normal ist. Dann gilt für $\lambda > s(A)$:

$$s_K(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)_K T(t)_K\|_q .$$

Beweis: Nach 2.6 gilt für $s_K(A)$ die Formel $s_K(A) = \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\| : x \in K\}$. Aus der Definition der q-Operatornorm und der Tatsache, daß der Logarithmus eine monoton wachsende stetige Funktion auf $\mathbb{R}^+$ ist, ergeben sich die Gleichungen:

$$\sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\| : x \in K\}$$
$$= \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \{\sup \|R(\lambda,A)T(t)x\| : x \in K, \|x\| \leq 1\}$$
$$= \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)_K T(t)_K\|_q .$$

Den folgenden Teil führen wir nicht in voller Allgemeinheit durch, sondern beschränken uns zugunsten der Übersichtlichkeit auf den Fall, daß K normal ist und die Familie der auf (E_K,q) induzierten Operatoren $\{T(t)_K\}$ auf (E_K,q) eine stark stetige Halbgruppe mit Generator A_K bildet. Dadurch vermeiden wir den Übergang zur stark stetigen Halbgruppe $\{\tilde{T}(t)_K\}$.
$s_K(A) = \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\| : x \in K\}$ entspricht nun dem in [23, App. 2] für beschränkte positive Operatoren eingeführten C-Spektralradius. Dies wird insbesondere im folgenden Satz deutlich.

5.8 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K) und K normal. Ist $\{T(t)_K\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf (E_K,q) mit Generator A_K, so gilt $s_K(A) = s(A_K)$.

Beweis: Weil K in E normal ist, ist K auch in (E_K,q) normal, da auf K die ursprüngliche und die q-Norm übereinstimmen. Also ist K ein erzeugender und normaler Kegel in (E_K,q). Aus 4.5 folgt, daß $s_K(A_K) = s(A_K)$ ist. Nun ist nach 2.6 und 5.7

$$s_K(A_K) = \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log q(R(\lambda,A)T(t)x): x \in K\}$$

$$= \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)_K T(t)_K\|_q = s_K(A). \qquad (\lambda > s(A))$$

Wir zeigen nun, daß $s_K(A)$ unter den Voraussetzungen von 5.8 im Spektrum von A liegt und man sogar den Teil des Spektrums, der $s_K(A)$ enthält, genauer angeben kann. Dazu definieren wir:

5.9 Definition: $A\sigma(A)_K := \{\lambda \in \mathbb{R}$: es gibt eine normierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K \cap D(A)$, so daß $((\lambda-A)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist$\}$ heißt approximatives Kegelpunktspektrum von A.

5.10 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K) und K normal. Ist $\{T(t)_K\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf (E_K,q), so liegt der Wert $s_K(A)$ im approximativen Kegelpunktspektrum von A, wenn er endlich ist.

Beweis: Weil K in (E_K,q) erzeugend ist, stimmen nach 4.2 $p(A_K)$ und $s(A_K)$ überein. Wegen 5.8 sind $s_K(A)$ und

$p(A_K)$ gleich. Außerdem liegt $p(A_K)$ im Spektrum von A_K (siehe 4.2). Wir wählen nun eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_n > p(A_K)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Ferner konvergiere $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $p(A_K)$. Dann ist für alle $n\in\mathbb{N}$ $R(\lambda_n,A_K) \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n,A_K)\|_q = \infty$. Weil K in (E_K,q) erzeugend ist, gibt es nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ein $x \in K$, für das $\lim_{n\to\infty} q(R(\lambda_n,A_K)x) = \infty$ ist.

Setzt man $x_n := q(R(\lambda_n,A_K)x)^{-1}R(\lambda_n,A_K)x$, so ist $x_n \in D(A_K)\cap K$, also auch $x_n \in D(A)\cap K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $q(x_n) = \|x_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \|(p(A_K)-A)x_n\|$ $= \lim_{n\to\infty} q(R(\lambda_n,A_K)x)^{-1}q(x) = 0$. Damit ist gezeigt, daß die schwache Kegelspektralschranke $s_K(A)$, die ja mit $p(A_K)$ übereinstimmt, im approximativen Kegelpunktspektrum von A liegt.

§6 Die schwache Kegelwachstumsschranke ω_K

Auch bei der Definition der Wachstumsschranke $\omega = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|$ (für eine positive Halbgruppe $\{T(t)\}$) geht - wie bei der Spektralschranke - die Ordnungsstruktur des Banachraums E nicht ein. Es ergeben sich jedoch auch hier in natürlicher Weise Ergebnisse, wenn man - entsprechend zur schwachen Kegelspektralschranke - eine vom Kegel abhängige Wachstumsschranke einführt (6.1).

Nach einer Darstellung dieser "schwachen Kegelwachstumsschranke" in speziellen Situationen (6.2) studieren wir den Zusammenhang dieses Begriffs mit dem in [29] eingeführten "schwachen Kegelspektralradius" der Operatoren $\{T(t)\}$. Es zeigt sich, daß sich die aus dem Bereich der Spektraltheorie bekannte Gleichung $r(T(t)) = e^{\omega t}$ (siehe [3]) nun in Abhängigkeit von der in E gegebenen Ordnungsstruktur formulieren läßt (6.4).

6.1 Definition: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K). Dann heißt für $x \in K$ und $x' \in K'$

$\omega_{x,x'} := \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \langle T(t)x,x' \rangle$ Wachstumsschranke von $t \to \langle T(t)x,x' \rangle$ und

$\omega_K := \sup \{\omega_{x,x'} : x \in K,\ x' \in K'\}$ schwache Kegelwachstumsschranke von $\{T(t)\}$.

Zusätzliche Anforderungen an den Kegel führen wie im Fall der schwachen Kegelspektralschranke zu einer einfacheren Darstellung von ω_K (für die Bezeichnung $\|T(t)\|_q$ siehe §5).

6.2 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K). Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Ist der Kegel K normal, so ist

$$\omega_K = \sup\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|T(t)x\| : x \in K\}$$
$$= \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|T(t)_K\|_q .$$

(ii) Ist K erzeugend und normal, so ist $\omega_K = \omega$.

Beweis: (i) Wir setzen $\alpha := \sup\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \|T(t)x\| : x \in K\}$. Dann ist offensichtlich $\omega_K \leq \alpha$. Wir gehen nun wie in 2.6 vor. Zunächst sei $\lambda > \omega_K$. Dann ist für alle $x \in K$ und $x' \in K'$ $\lambda > \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \langle T(t)x,x'\rangle$. Daher gibt es zu $x \in K$ und $x' \in K'$ ein $t_o(x,x') \geq 0$, so daß für alle $t \geq t_o(x,x')$ $\frac{1}{t} \log \langle T(t)x,x'\rangle < \lambda$ ist. Weil die Funktionen $t \to \langle T(t)x,x'\rangle$ auf den Intervallen $[0,t_o(x,x')]$ stetig sind, gibt es Konstanten $M(x,x') \geq 0$, so daß für alle $t \geq 0$, $x \in K$ und $x' \in K'$ $\langle T(t)x,x'\rangle \leq M(x,x')e^{\lambda t}$ ist. Da K normal, also K' in E' erzeugend ist, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit die Existenz einer Konstante $M(x) \geq 0$, so daß für $x \in K$ und $t \geq 0$ $\|T(t)x\| \leq M(x)e^{\lambda t}$ ist. Folglich ist $\alpha \leq \lambda$ und daher $\omega_K = \alpha$.

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Definition der q-Operatornorm von T(t) (siehe Vorbemerkung zu 5.7).

(ii) Wenn K erzeugend und normal ist, so ist für alle $t \geq 0$ $\|T(t)\| = |T(t)|_q$, daher folgt die Behauptung aus (i).

Wir modifizieren nun ein Beispiel von M. Wolff, um einen positiven Generator auf einem geordneten Banachraum (E,K) mit totalem Kegel K anzugeben, für den $s_X(A) = -1$ und $\omega_K = 0$ ist.

6.3 Beispiel: Sei $E := L^1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+)$ mit der Norm $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ versehen. Für $u(s) := e^{-s}$ bildet die Menge $K := \{f \in E$: es gibt ein $t \geq 0$ und ein $g \in [u, 2u]$, so daß $f = t \cdot g$ ist$\}$ einen abgeschlossenen, totalen und normalen Kegel in E (siehe Beispiel 1.2), dessen lineare Hülle K-K mit dem Raum $L^1(\mathbb{R}^+) \cap \{f \in C_0(\mathbb{R}^+)$: $s \to f(s)e^s$ ist beschränkt$\}$ identifiziert werden kann.
K-K ist bezüglich der Norm $|f|_K := |f|_1 + \sup_{s \geq 0} |f(s)e^s|$ vollständig und zu $x \in E_K$ findet man nach 5.5 eine Zerlegung $f = f_1 - f_2$ mit $f_i \in K$ und $|f_i|_K \leq M|f|_K$ (für eine Konstante $M > 0$, $i=1,2$), so daß mit den Bezeichnungen von §5 gilt: $q(f) \leq q(f_1) + q(f_2)$
$= \|f_1\| + \|f_2\| \leq |f_1|_K + |f_2|_K \leq 2M|f|_K$. Dies zeigt, daß die Normen q und $|\cdot|_K$ vergleichbar, also äquivalent sind. $(E_K, |\cdot|_K)$ ist folglich zu dem in §5 definierten

Raum (E_K,q) topologisch isomorph. Ist nun $\{T(t)\}$ die Halbgruppe der Translationen auf E, so ist bekanntlich $s(A) = \omega = 0$. Die Operatoren $\{T(t)_K\}$ bilden, wie einfache Rechnungen zeigen, eine stark stetige Halbgruppe auf E_K, für die $\omega(T(t)_K) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|_q$ $= \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|T(t)f\|: f \in K\} = \omega_K = 0$ ist. Andererseits existiert das Integral $\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s)ds$ für alle $f\in K$ nur dann, wenn $\lambda > -1$ ist, so daß man $s_K(A) = -1$ erhält. ($s_K(A)$ stimmt nach 5.8 mit $s(A_K)$, der Spektralschranke des Generators von $\{T(t)_K\}$ überein.) Zusammenfassend ergibt sich: $s_K(A) = -1 < \omega_K = 0$.

Der folgende Satz zeigt, daß sich ω und ω_K sehr ähnlich verhalten. Bekanntlich gilt für die Spektralradien $r(T(t))$ der Operatoren einer stark stetigen Halbgruppe $r(T(t)) = e^{\omega\cdot t}$ (siehe z.B. [3]). Betrachtet man nun den in [29] definierten Begriff des schwachen Kegelspektralradius $r_\sigma^+(T(t))$, der nach [29, 2.2] mit dem Wert $\sup \{\overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle T(t)^n x,x'\rangle)^{\frac{1}{n}}: x \in K, x'\in K'\}$ übereinstimmt, so hängen $r_\sigma^+(T(t))$ und ω_K folgendermaßen zusammen:

6.4 Satz: Ist $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K), so gilt für alle $t \geq 0$: $r_\sigma^+(T(t)) = e^{\omega_K\cdot t}$.

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}^+$ fest gewählt. Weil der Logarithmus eine monoton steigende, stetige Funktion auf $\mathbb{R}^+$ ist, ergeben sich die Gleichungen $\frac{1}{t} \log r_\sigma^+(T(t))$

$$= \frac{1}{t} \log \sup \{\overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle T(t)^n x, x' \rangle)^{\frac{1}{n}} : x \in K, x' \in K'\}$$

$$= \sup \frac{1}{t} \log \{\overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle T(t)^n x, x' \rangle)^{\frac{1}{n}} :: x \in K, x' \in K'\}$$

$$= \sup \{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{t} \log (\langle T(t)^n x, x' \rangle)^{\frac{1}{n}} : x \in K, x' \in K'\}$$

$$= \sup \{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{nt} \log \langle T(nt)x, x' \rangle : x \in K, x' \in K'\} = \omega_K.$$

Bekanntlich stimmen für normstetige Halbgruppen $s(A)$ und ω überein. Entsprechendes gilt auch für $s_K(A)$ und ω_K:

6.5 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive, normstetige Halbgruppe auf (E,K) mit Generator A. Ist K normal, so ist $s_K(A) = \omega_K$.

Beweis: Da A nach Voraussetzung ein beschränkter Operator ist, ist $R(\lambda,A)$ (für $\lambda > s(A)$) eine offene Abbildung, d.h. es gibt eine Konstante $M > 0$, so daß für alle $x \in K$ $\|x\| \leq M\|R(\lambda,A)x\|$ ist. Nun gilt nach 2.6 und 6.2:

$$\omega_K = \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|T(t)x\| : x \in K\}$$

$$\leq \sup \{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \|R(\lambda,A)T(t)x\| : x \in K\} = s_K(A).$$

Daraus folgt aber sofort, daß $s_K(A)$ und ω_K übereinstimmen.

§7 Sätze vom Krein-Rutman-Typ

Wir erinnern zunächst an die beiden grundlegenden Ergebnisse von Krein und Rutman über beschränkte, positive Operatoren T auf geordneten Banachräumen (E,K) ([17]):

Theorem A: Wenn K total und T ein kompakter positiver Operator auf E mit Spektralradius $r(T) > 0$ ist, so ist $r(T)$ ein Eigenwert mit positivem Eigenvektor.

Theorem B: Besitzt K innere Punkte und ist $r(T)$ der Spektralradius eines positiven Operators T auf E, so gibt es eine positive Linearform $\phi \neq 0$, so daß $T'\phi = r(T)\phi$ ist.

In diesem Paragraphen übertragen wir die obigen Sätze in etwas allgemeinerer Form auf Generatoren positiver Halbgruppen. Dabei verwenden wir die folgende Definition:

7.1 Definition: Sei U die Einheitskugel in (E,K). Ein positiver Operator T auf E heißt kegelkompakt, wenn $T(U \cap K)$ in E relativkompakt ist ([23, App. 2]). Eine positive Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf E heißt kegelkompakt, wenn es ein $t_o > 0$ gibt, so daß $T(t_o)$ kegelkompakt ist.

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, gehen wir im nächsten Satz davon aus, daß die auf E_K induzierten Operatoren $\{T(t)_K\}$ eine positive (stark stetige) Halbgruppe bilden und daß K normal ist. Dies ist keine Einschränkung, sondern vermindert nur den technischen Aufwand.

7.2 Satz: Sei A ein positiver Generator auf (E,K), dessen zugehörige Halbgruppe kegelkompakt ist, und K sei normal. Dann ist $s_K(A)$ ein Eigenwert von A mit positivem Eigenvektor, wenn $s_K(A)$ endlich ist.

Beweis: Nach 5.10 liegt $s_K(A)$ im approximativen Kegelpunktspektrum von A. Daher gibt es eine normierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K \cap D(A)$ für die $((s_K(A) - A)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Nach 0.12 ist nun auch für alle $t \geq 0$ $\lim_{n\to\infty} \|T(t)x_n - e^{s_K(A)t}x_n\| = 0$. Da nach Voraussetzung ein $t_o > 0$ existiert, so daß $T(t_o)$ kegelkompakt ist, ist für dieses t_o die Menge $\{T(t_o)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in E relativkompakt; demnach hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x in E, der (da K abgeschlossen ist) sogar in K liegt. Es ist $\|x\| = 1$, und weil x ein Eigenvektor zum Eigenwert $e^{s_K(A)t}$ ist (für alle $t \geq 0$), ergibt sich $Ax = s_K(A)x$.

7.3 Korollar: Ist A der Generator einer kompakten positiven Halbgruppe auf dem geordneten Banachraum (E,K) mit totalem und normalem Kegel K, so ist s(A)

ein Eigenwert mit positivem Eigenvektor, wenn $\sigma(A)$ nicht die leere Menge ist.

Beweis: Weil die Voraussetzungen von 4.7 (i) erfüllt sind, ist $s_K(A) = s(A)$ (siehe 3.4 (i) und 4.2). Die Behauptung folgt nun sofort aus 7.2.

Damit haben wir eine modifizierte Fassung von Theorem A bewiesen, deren entsprechende Version für beschränkte positive Operatoren man in [23, App. 2.5] findet.

Daß sich die Ergebnisse über positive Operatoren im folgenden nicht ganz befriedigend auf die Theorie positiver Generatoren übertragen lassen, liegt daran, daß man im Fall eines beschränkten positiven Operators davon ausgehen kann, daß der auf (E_K,q) induzierte Operator wiederum ein beschränkter positiver Operator ist. Dessen Eigenschaften werden bei der Untersuchung der spektraltheoretischen Gesichtspunkte stark berücksichtigt.
Ist jedoch A ein positiver Generator, so ist, wie 5.2 zeigt, der auf (E_K,q) eingeschränkte Operator $A_{|K}$ nicht notwendigerweise ein Generator.

Wir wenden uns nun Theorem B zu. Aus diesem Theorem kann man leicht folgern, daß der adjungierte Operator A' einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $s(A)$ besitzt. Die Methoden der Schlußweise sind beispielsweise in

[4,3.3] geschildert.
Stärkere Voraussetzungen führen zu einer etwas allgemeineren Version von Theorem B. Dazu schließen wir zunächst einige Erläuterungen über die adjungierte Halbgruppe an (siehe 0.18).

In 0.18 wurde der abgeschlossene Teilraum E^* von E' definiert. Dieser Raum E^*, auf dem die adjungierte Halbgruppe $\{T(t)^*\}$ stark stetig ist, wird nun als geordneter Banachraum mit Kegel $K^* := K' \cap E^*$ betrachtet. (K^* erfüllt i.a. alle Bedingungen eines Kegels bis auf (K3) (siehe 0.2); ist K jedoch ein totaler Kegel, so gilt auch (K3).) Analog zu §5 definieren wir den geordneten Banachraum $(E^*_{K^*}, q^*)$, wobei q^* das Eichfunktional der konvexen, kreisförmigen Hülle von $U^\circ \cap K^*$ ist.
Wenn E eine Ordnungseinheit besitzt, so ist K erzeugend, also K' in E' normal (0.5). Weil auf K^* die ursprüngliche und die q^*-Norm übereinstimmen, ist auch K^* in $(E^*_{K^*}, q^*)$ normal, so daß $(E^*_{K^*}, q^*)$ in diesem Fall einen erzeugenden und normalen Kegel besitzt.
Mit $\{T(t)^*_{K^*}\}$ bezeichnen wir die Familie der auf $(E^*_{K^*}, q^*)$ induzierten Operatoren. Aus den oben erwähnten Gründen gehen wir davon aus, daß diese Familie auf $(E^*_{K^*}, q^*)$ stark stetig ist und erhalten folgende Version von Theorem B:

7.4 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K),

E besitze eine Ordnungseinheit e, und die Halbgruppe $\{T(t)^*_{K^*}\}$ sei auf $(E^*_{K^*}, q^*)$ stark stetig. Dann ist $s_{K^*}(A^*)$ ein Eigenwert von A' mit positivem Eigenvektor, wenn $s_{K^*}(A^*)$ endlich ist.

Beweis: K^* ist nach den obigen Bemerkungen ein normaler Kegel in $(E^*_{K^*}, q^*)$. Aus 5.10 folgt, daß $s_{K^*}(A^*)$ im approximativen Kegelpunktspektrum von A^* liegt. Also gibt es eine normierte Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in K^*, so daß $\lim_{n\to\infty} \|A^* x_n^* - s_{K^*}(A^*) x_n^*\| = 0$ ist. Wir wählen nun einen $\sigma(E',E)$-Häufungspunkt x_o^* der Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$; dieser liegt offensichtlich in K^* und erfüllt die Gleichung $A' x_o^* = s_{K^*}(A^*) x_o^*$. Es genügt nun zu zeigen, daß $x_o^* \neq 0$ ist. Weil jedoch für $x' \in K'$ mit $\|x'\| = 1$ die Abschätzung $1 = \sup\{|\langle x, x'\rangle| : \|x\| \leq 1\} \leq M|\langle e, x'\rangle|$ gilt (für eine Konstante $M > 0$), ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $|\langle e, x_n^*\rangle| \geq \frac{1}{M}$, so daß x_o^* nicht der Nullvektor sein kann.

§8 Irreduzible Halbgruppen

Das folgende Beispiel zeigt, daß für einen positiven Generator A auf einem geordneten Banachraum (E,K) der Charakter der Singularität von $R(\lambda,A)$ in der Spektralschranke $s(A)$ i.a. keinen Einfluß auf die übrigen Spektralwerte auf der Linie $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z = s(A)\}$ hat. Wir folgen dabei einem Beispiel für beschränkte Operatoren von H.H. Schaefer in [23, App. 3].

8.1 Beispiel: Sei E ein mindestens zweidimensionaler reeller Banachraum. F sei ein abgeschlosssener Teilraum der Kodimension 1 und G ein komplementärer Teilraum zu F. Dann ist $G := \{\lambda x_0 : \lambda \in R\}$ für ein $x_0 \in E$ und $E = F + G$. Zu jedem $x \in E$ sei $x = y + \lambda x_0$ die eindeutige Zerlegung mit $y \in F$. Die Menge $K := \{x \in E: \lambda \geq \|y\|\}$ ist ein abgeschlossener, normaler und erzeugender Kegel in E. Falls $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf F mit $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ ist, bildet die Familie $\{S(t)\}$ mit $S(t)x = T(t)y + \lambda x_0$ $(x = y + \lambda x_0)$ eine positive Halbgruppe auf E mit Generator A. Ist B der Generator von $\{T(t)\}$, so gilt $\sigma(A) = \sigma(B) \cup \{0\}$. Wählt man nun die Halbgruppe $\{T(t)\}$ und den Banachraum F geeignet, so kann $\sigma(A)$ eine beliebige abgeschlossene $\{0\}$-enthaltende Teilmenge von $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq 0\}$ sein.

Orientiert man sich am Fall beschränkter Operatoren, so sind jedoch weitere Ergebnisse zu erwarten, wenn der geordnete Banachraum spezieller gewählt und der Halbgruppe $\{T(t)\}$ bzw. ihrem Generator A weitere Bedingungen auferlegt werden. Als wesentlich für das weitere Vorgehen hat sich dabei der Begriff des irreduziblen Operators erwiesen (siehe 0.6). Um für Generatoren von Halbgruppen eine entsprechende Situation herzustellen, gehn wir von folgender Definition aus:

8.2 Definition: Ein positiver Generator A auf (E,K) heißt irreduzibel, wenn für ein $\lambda > \omega$ und alle $x > 0$ das Element $R(\lambda,A)x$ ein quasiinnerer Punkt von K ist (siehe 0.6).
Die zu A gehörende Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt dann ebenfalls irreduzibel.

Wir führen den Begriff der irreduziblen Halbgruppe hier etwas allgemeiner ein als in [2] und [10], da die spektraltheoretischen Ergebnisse, die sich in Anlehnung an Schaefer [23, App. 3] herleiten lassen, auch für diesen Fall gelten. In Banachverbänden [24] und C^*-Algebren [11] stimmt die obige Definition mit der üblichen Definition der irreduziblen Halbgruppe überein, was beispielsweise in [2] gezeigt wird. Dort werden auch weitere, den Begriff der Irreduzibilität berührende Eigen-

schaften positiver Halbgruppen diskutiert.
Wir charakterisieren zunächst die obige Definition etwas genauer und leiten gleichwertige Aussagen zur Irreduzibilität einer Halbgruppe her.
Für den Begriff des soliden Teilkegels K_o von K verweisen wir auf 0.6. K_o heißt $\{T(t)\}$-invariant, wenn $T(t)K_o$ für alle $t \geq 0$ in K_o enthalten ist.

8.3 Satz: Sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf (E,K) mit Generator A. Wir betrachten folgende Aussagen:

(i) $\{T(t)\}$ ist irreduzibel.

(ii) Es gibt ein $\lambda > \omega$, so daß der Operator $R(\lambda,A)$ irreduzibel ist.

(iii) Jeder $\{T(t)\}$-invariante solide Teilkegel $K_o \neq \{0\}$ von K ist total.

(iv) Für alle $x > 0$ und $x' > 0$ gibt es ein $t > 0$, so daß $\langle T(t)x,x' \rangle > 0$ ist.

Es gelten die Implikationen (i) <=> (ii) <=> (iii) => (iv).

Beweis: (i) => (ii): Sei $\lambda > \omega$ so gewählt, daß für alle $x > 0$ das Element $R(\lambda,A)x$ quasiinnerer Punkt von K ist. Für $\mu > r(R(\lambda,A))$ und $x > 0$ ist daher auch $R(\mu,R(\lambda,A))R(\lambda,A)x$ ein quasiinnerer Punkt von K. Infolgedessen ist $R(\lambda,A)$ irreduzibel.

(ii) => (iii): Sei $\lambda > \omega$ so gewählt, daß $R(\lambda,A)$ irreduzibel ist. Wir nehmen an, daß K_o ein $\{T(t)\}$-invarianter solider Teilkegel von K ist, der nicht nur aus dem Nullelement besteht. Ist $x \in K_o \setminus \{0\}$, so ist für $\mu > r(R(\lambda,A))$

$R(\mu,R(\lambda,A))R(\lambda,A)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(\lambda,A)^n}{\mu^n} x$ ein quasiinnerer Punkt von K. Ferner ist für alle $n \geq 1$ nach 0.16

$R(\lambda,A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ ein Element aus K_o. Infolgedessen ist $R(\mu,R(\lambda,A))R(\lambda,A)x$ ein quasiinnerer Punkt von K, der sogar in K_o liegt. Also muß K_o total sein.

(iii) => (i): Sei $x > 0$ und K_o der von $R(\lambda,A)x$ erzeugte solide Teilkegel von K. Nach 0.13 ist

$R(\lambda,A)x = e^{-\lambda t}T(t)R(\lambda,A)x + \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$. Daher ist

$T(t)R(\lambda,A)x \leq e^{\lambda t}R(\lambda,A)x$, so daß K_o von der Halbgruppe $\{T(t)\}$ invariant gelassen wird. Nach Voraussetzung ist K_o dann ein totaler Kegel, infolgedessen ist $R(\lambda,A)x$ ein quasiinnerer Punkt von K.

(i) => (iv): Sei $\lambda > \omega$ so gewählt, daß $R(\lambda,A)x$ für alle $x > 0$ ein quasiinnerer Punkt von K ist. Für alle $x \in K$ und $x' \in K'$ ist $\langle R(\lambda,A)x,x' \rangle = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \langle T(s)x,x' \rangle ds$. Für $x > 0$ und $x' > 0$ ist dieses Integral stets > 0, weil $R(\lambda,A)x$ ein quasiinnerer Punkt von K ist. Die Ste-

tigkeit der Funktionen $s \to \langle T(s)x,x' \rangle$ $(x \in K,\ x' \in K')$ bewirkt nun, daß ein $t \geq 0$ existiert, so daß $\langle T(t)x,x' \rangle > 0$ ist.

Wie zu erwarten war, ergeben sich unter diesen Voraussetzungen - entsprechend zum Fall beschränkter Operatoren - genauere Aussagen über das periphere Punktspektrum irreduzibler Generatoren.
Dabei folgt aus der Existenz einer irreduziblen Halbgruppe auf dem Raum (E,K) notwendigerweise, daß der Kegel K in E total ist.

8.4 Satz: Sei A ein irreduzibler Generator auf (E,K). Wenn s(A) ein Pol der Resolvente ist, gelten folgende Aussagen:

(i) Es gibt positive Eigenvektoren zu A und A' zum Eigenwert s(A). Jeder positive Eigenvektor zu s(A) ist ein quasiinnerer Punkt von K und jeder positive Eigenvektor x'_0 von A' ist eine strikt positive Linearform (d.h. $\langle x,x'_0 \rangle > 0$ für $x > 0$).

(ii) s(A) ist ein Pol der Ordnung 1.

Beweis: (i): O.B.d.A. sei $s(A) = 0$. Betrachtet man den Leitkoeffizienten P des Hauptteils der Resolvente in 0, so ist $P = \lim_{k \to 0} \lambda^k R(\lambda,A)$ ein positiver Operator, da $R(\lambda,A)$ für $\lambda > 0$ positiv ist. Ferner ist $P \neq 0$. Weil A

ein irreduzibler Generator auf (E,K) ist, ist K total. Daher gibt es ein $x \in K$, für das $Px > 0$ ist. Nun erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, mit Px einen positiven Eigenvektor zu A. Auf ähnliche Weise ergeben sich positive Eigenvektoren zu A'.

Nach 0.12 gilt nun für Eigenvektoren $x_o \in K$ und $x'_o \in K'$: $T(t)x_o = x_o$ und $T(t)'x'_o$ für alle $t \geq 0$. Weil A irreduzibel ist, gibt es ein $\lambda > \omega$, so daß $R(\lambda,A)x_o$ ein quasiinnerer Punkt von K ist. Aus der Gleichung

$$R(\lambda,A)x_o = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x_o dt = \frac{1}{\lambda}\, x_o$$ folgt nun, daß auch x_o ein quasiinnerer Punkt von K ist.

Ebenso ergibt sich aus

$$\langle R(\lambda,A)x, x'_o\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle T(t)x, x'_o\rangle dt = \frac{1}{\lambda}\langle x, x'_o\rangle,$$ daß der Wert $\langle x,x'_o\rangle$ für alle $x > 0$ echt größer als 0 ist, da $R(\lambda,A)x$ für alle $x > 0$ quasiinnerer Punkt von K ist. Folglich ist x'_o eine strikt positive Linearform.

(ii): Wiederum sei o.B.d.A. $s(A) = 0$. P sei wie in (i) gegeben. P ist also positiv und $\neq 0$. Nun gilt für alle $t \geq 0$ $T(t)P = PT(t)$, so daß der solide Teilkegel $K_o := \{x \in K: Px = 0\}$ von K $\{T(t)\}$-invariant ist. Weil A irreduzibel ist, ist K_o nach 7.3 entweder total oder K_o besteht nur aus dem Nullelement. Da $P \neq 0$ ist, muß $K_o = \{0\}$ sein. Wenn nun $k > 1$ wäre, so wäre $P^2 = 0$ (siehe [31], S. 228), d.h. $P(K) \subseteq K_o = \{0\}$. Dies ist aber ein

Widerspruch zu $P_- \neq 0$ (man beachte, daß K total ist). Daher hat die Resolvente in 0 einen Pol der Ordnung 1.

8.5 Korollar: Unter den Voraussetzungen von 8.4 haben alle Pole von $R(\lambda,A)$ auf der Linie $s(A) + iR$ die Ordnung 1.

Beweis: Die Behauptung folgt aus 4.9 und 8.4.

Literaturverzeichnis

[1] T. Ando
On fundamental properties of a B-space with a cone.
Pacific J. Math., 12, 1163-1169, 1962.

[2] C.J.K. Batty and D.W. Robinson
Positive One-Parameter Semigroups on ordered Banach-spaces.
Acta Appl. Math. 1984.

[3] E.B. Davies
One-Parameter Semigroups.
Academic Press 1980.

[4] R. Derndinger
Über das Spektrum positiver Generatoren.
Math. Z., 172, 281-293, 1980.

[5] R. Derndinger und R. Nagel
Der Generator starkstetiger Verbandshalbgruppen auf C(X) und dessen Spektrum.
Math. Ann. 245, 159-177, 1979.

[6] G. Doetsch
Handbuch der Laplace-Transformation.
I: Theorie der Laplace-Transformation.
Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag 1971.

[7] N. Dunford and J.T. Schwartz
Linear Operators, Part I.
New York, Wiley 1958.

[8] G. Greiner
Zur Perron-Frobeniustheorie stark stetiger Halbgruppen.
Math. Z. 177, 401-423, 1981.

[9] G. Greiner -
Spektrum und Asymptotik stark stetiger Halbgruppen positiver Operatoren.
Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie 1982, 3.

[10] G. Greiner, J. Voigt and M. Wolff
On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators.
J. Operator Theory 5, 245-256, 1981.

[11] U. Groh
The peripheral spectrum of Schwarz operators on C^*-algebras.
Math. Z. 176, 311-318, 1981.

[12] J. Hale
Theory of Functional Differential Equations.
Springer 1977.

[13] E. Hille
Functional Analysis and Semi-Groups.
Amer.Math.Soc.Colloq.Pub. vol.31, New York 1948.

[14] E. Hille and R.S. Phillips
Functional Analysis and Semi-Groups.
Providence, R. I. 1957.

[15] W. Kerscher
Positive Lösungen retardierter Cauchyprobleme.
Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen 1983.

[16] M.A. Krasnoselskii
Positive solutions of Operator Equations.
Fizmatgiz, Moscow 1962; English transl., Noordhoff, Groningen, 1964.

[17] M.G. Krein and M.A. Rutman
Linear operators leaving invriant a cone in a Banach space.
Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 3, No 1 (23), 3-95, 1948. (Russian). Auch A. M. S. Transl. Ser. 1, vol. 10, 199-325, 1962.

[18] R. Nagel
Zur Charakterisierung stabiler Operatorhalbgruppen.
Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen 1981/82.

[19] R. Nagel
Sobolev Spaces and Semigroups.
Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen 1983.

[20] F. Neubrander
Laplace Transform and asymptotic Behaviour of strongly continous semigroups.
Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen 1982/83.

[21] A. Pazy
Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.
Lecture Notes 10, University of Maryland 1974.

[22] R.S. Phillips
The adjoint semi-group.
Pacific J. Math. 5, 269-283, 1955.

[23] H.H. Schaefer
Topological Vector Spaces (4^{th} print).
Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980.

[24] H.H. Schaefer
Banach Lattices and Positive Operators.
Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974.

[25] H.H. Schaefer
Some spectral properties of positive linear operators.
Pacific J. Math., 10, 1009-1019, 1960.

[26] H.H. Schaefer
Spektraleigenschaften positiver Operatoren.
Math. Z. 82, 303-313, 1963.

[27] H.H. Schaefer
Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie.
Jahresbericht der DMV 82, 33-50, 1980.

[28] H.H. Schaefer
On the spectral bound of irreducible Semi-groups.
Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen 1983.

[29] E. Scheffold
Über den schwachen Kegel-Spektralradius und die nichtnegativen Spektralwerte positiver Operatoren.
Habilitationsschrift Bochum 1973.
(Math. Z. 135, 93-110, 1974.)

[30] M. Wolff
On C_o-semigroups of lattice-homomorphisms on a Banach lattice.
Math. Z. 164, 69-80, 1978.

[31] K. Yosida
Functional Analysis (5^{th} ed.)
Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978.

[32] J. Zabczyk
A note on C_o-semigroups.
Bull. Acad. Polon. Sci. 23, 895-898, 1975.

Lebenslauf

Am 4. Oktober 1957 wurde ich als Tochter des Studienrats Otto Klein und seiner Ehefrau Wiltraud, geb. Rosenkranz, in Friedrichshafen geboren.
Im Frühjahr 1964 trat ich in die Volksschule in Friedrichshafen ein und wechselte im Herbst 1964, als mein Vater zum Oberstudiendirektor in Calw ernannt wurde, in die Volksschule Calw-Wimberg über. Von 1967 bis 1976 besuchte ich das Hermann-Hesse-Gymnasium in Calw. Dort legte ich im Frühjahr 1976 die Reifeprüfung ab.
Im Wintersemester 1976/77 begann ich mit dem Studium der Fächer Mathematik und Latein für das Lehramt an Gymnasien an der Universität Tübingen. Im Herbst 1980 bestand ich das Staatsexamen in Latein, im Herbst 1981 in Mathematik. Von 1979 bis 1982 war ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen tätig.
Vom August 1982 bis zum Januar 1984 absolvierte ich den Vorbereitungsdienst am Seminar für Studienreferendare Tübingen und bestand am 31.1.1984 die Pädagogische Prüfung für das Lehramt an Gymnasien.

Meine akademischen Lehrer im Fach Mathematik waren die Herren Professoren W. Kaup, R. Nagel, H.H. Schaefer, U. Schlotterbeck, P. Schmid, A. Schönhage.